Ime in priimek

Vpisna številka

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| Σ | |

**Linearna algebra: računski izpit**

13. junij 2024

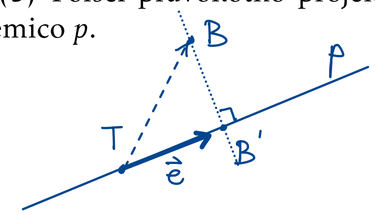
Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

## 1. naloga (25 točk)

Dani sta točki $A(0,5,4)$ in $B(-1,0,-7)$ ter premica $p$

$$p : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{2-z}{6}.$$

**a) (5)** Poišči pravokotno projekcijo točke $B$ na premico $p$. Določi razdaljo med točko $B$ in premico $p$.




Iz enačbe p razberemo:

$\vec r_T = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec e = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$.

$$\vec{TB'} = \mathrm{proj}_{\vec e}(\vec{TB}) = \frac{\vec{TB}\cdot\vec e}{\vec e\cdot\vec e}\,\vec e = \frac{49}{49}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix},$$

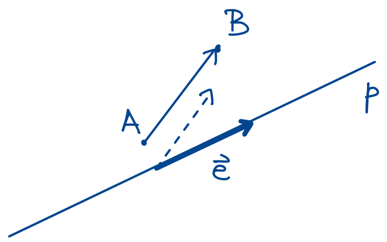
$$\vec{TB} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

torej $\vec r_{B'} = \vec r_T + \vec{TB'} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

in $B'(5,2,-4)$.

Še: $d(B,p) = d(B,B') = \|\vec{BB'}\| = \|\vec e\| = 7$.

**b) (10)** Določi enačbo ravnine $\Sigma$, ki vsebuje točki $A$ in $B$ in je vzporedna premici $p$.




$$\vec n \parallel \vec{AB}\times\vec e = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -11 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ -28 \\ 7 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vzamemo $\vec n = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Torej: $\Sigma : 9x - 4y + z = -16$.

**c) (10)** Izračunaj razdaljo med ravnino $\Sigma$ in premico $p$.

$$d(\Sigma, p) = d(\Sigma, T) = \frac{|\vec n\cdot\vec r_T - d|}{\|\vec n\|} = \frac{\left|\begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 16\right|}{\sqrt{98}} = \frac{49}{7\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}.$$

saj sta $\Sigma$ in $p$ vzporedni

**2. naloga (25 točk)**

Dana sta matrika $A$ in vektor $\vec{d}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**a) (10)** Določi dimenziji stolpčnega in ničelnega prostora matrike $A$; $\dim(C(A))$ in $\dim(N(A))$. Poišči bazo za $C(A)$.

$\dim(C(A)) = \operatorname{rang} A$. Naredimo Gaussovo eliminacijo na $A$:

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Imamo 2 pivota, $\dim(C(A)) = 2$, $\dim(N(A)) = 3 - 2 = 1$.

Stolpci $A$, ki ustrezajo pivotnim stolpcem, (lahko) tvorijo bazo $C(A)$:

$$B_{C(A)} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

**b) (15)** Poišči vse vektorje $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, ki so pravokotni na $C(A)$ in za katere velja $\vec{d} \cdot \vec{x} = 3$.

Veljati mora $\vec{a}_1 \cdot \vec{x} = 0$, $\vec{a}_2 \cdot \vec{x} = 0$ in $\vec{d} \cdot \vec{x} = 3$ oz.

$\vec{a}_1^T \vec{x} = 0$, $\vec{a}_2^T \vec{x} = 0$ in $\vec{d}^T \vec{x} = 3$

oz. $$\begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vec{d}^T \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Torej
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_4 &= 3 \\ x_2 - 2x_4 &= -1 \\ x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

oz. $$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 - 4x_4 \\ 2x_4 - 1 \\ x_4 + 1 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{za } x_4 \in \mathbb{R}.$$

**3. naloga (25 točk)**

Naj bo $V$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$, ki ga razpenjajo vektorji

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}4\\0\\2\\2\end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\2\\-1\\3\end{bmatrix}.$$

**a) (15)** Poišči ortonormirano bazo za $V$ in določi dimenzijo $V$.

Uporabimo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \cdots\cdots \quad \vec{q}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}4\\0\\2\\2\end{bmatrix} - \frac{8}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \cdots\cdots \quad \vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\-1\\3\end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{-4}{8}\begin{bmatrix}2\\-2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\-2\\2\end{bmatrix}. \quad \cdots\cdots \quad \vec{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$B_V = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}, \quad \dim V = |B_V| = 3.$$

**b) (5)** Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a} = [2, 2, 1, -1]^{\mathsf{T}}$ na podprostor $V$.

$$\mathrm{proj}_V(\vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{q}_1)\vec{q}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{q}_2)\vec{q}_2 + (\vec{a} \cdot \vec{q}_3)\vec{q}_3 =$$

$$= 2\vec{q}_1 + 0\vec{q}_2 - \sqrt{2}\,\vec{q}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}.$$

**c) (5)** Določi dimenzijo $V^{\perp}$.

$$\underbrace{\dim V}_{\overset{\parallel}{3}} + \dim V^{\perp} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{\overset{\parallel}{4}}, \quad \text{torej} \quad \dim V^{\perp} = 1.$$

**4. naloga (25 točk)**

Naj bo $B$ matrika

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**a) (15)** Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike $B$.

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2+\lambda-2) = -\lambda(\lambda+2)(\lambda-1) = 0,$$

$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$ $\leftarrow$ lastne vrednosti $B$.

Lastni vektorji:

- $\lambda_1 = -2$:

$$B+2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 2x_3 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$, $\quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- $\lambda_2 = 0$:

$$B \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $\quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- $\lambda_3 = 1$:

$$B - I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - x_3 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$, $\quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**b) (5)** Poišči diagonalno matriko $D$ in ortogonalno matriko $Q$, da bo $B = QDQ^{\mathsf{T}}$. Če taki matriki $D$ in $Q$ ne obstajata, to natančno utemelji.

$B$ je simetrična, l. vred. so različne, zato so l. vektorji ortogonalni. Da dobimo $Q$ jih še normiramo:

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{q}_3 = \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3], \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**c) (5)** Poišči singularni (SVD) razcep $B$, tj. poišči *ustrezne* matrike $U$, $S$ in $V$, da bo $B = USV^{\mathsf{T}}$.

Edini popravek za $B = QDQ^{T}$, ki ga potrebujemo so poz. diag. elementi v $D$ (sing. vrednosti morajo biti $\geq 0$).

Vzamemo lahko:

$$U = [-\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3], \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = Q.$$