Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: 1. računski izpit

9. junij 2025

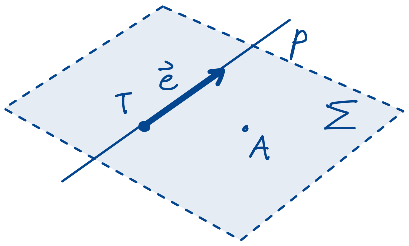
Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Dani sta točki $A(1,-1,1)$ in $B(0,3,7)$ ter premica p z enačbo

$$-x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}.$$

a) (10) Določi enačbo ravnine Σ, ki vsebuje točko A in premico p.



Iz enačbe premice p:

$$\vec{e}=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix},\quad \vec{r}_T=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$\vec{n}_\Sigma \parallel \vec{e}\times\vec{TA}=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\-3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix},\text{ vzemimo } \boxed{\vec{n}_\Sigma=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}}.$$

Enačba Σ je torej:

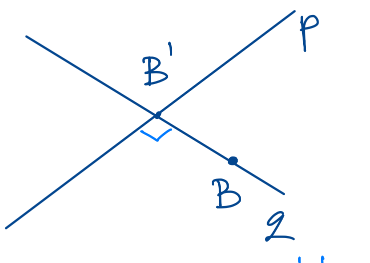
$$\boxed{2x+2y-z=-1.}$$

v levo stran vstavimo A

b) (5) Izračunaj razdaljo med točko B in ravnino Σ.

Če B vstavimo v enačbo Σ, dobimo $2\cdot 0+2\cdot 3-7=-1$, torej $B\in\Sigma$. To pa pomeni $d(B,\Sigma)=0$.

c) (10) Določi enačbo premice q, ki vsebuje točko B in seka premico p pod pravim kotom.



Lahko bi poiskali pravokotno projekcijo B' točke B na p. Po drugi strani pa je $q\perp p$ in $q\perp\vec{n}_\Sigma$, torej

smerni vektor premice q

$$\vec{e}_q \parallel \vec{e}\times\vec{n}_\Sigma=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\3\\-6\end{bmatrix},\text{ vzemimo } \boxed{\vec{e}_q=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}}.$$

Enačba premice q je:

$$\boxed{\frac{x}{2}=3-y=\frac{z-7}{2}.}$$

2. naloga (25 točk)

Dani so vektorji

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix} \text{ in } \vec{v}_4 = \begin{bmatrix}2\\2\\1\\1\end{bmatrix} \text{ ter } \vec{a} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\\-1\end{bmatrix} \text{ in } \vec{b} = \begin{bmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}.$$

Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$, ki je linearna ogrinjača množice $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$.

a) (10) Ali je kateri od vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vsebovan v V? Zakaj? Vsakega, ki je vsebovan, izrazi kot linearno kombinacijo $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$.

Označimo $A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4]$. Velja $\vec{a} \in V$ ali $\vec{b} \in V$, če je sistem $A\vec{x} = \vec{a}$ ali $A\vec{x} = \vec{b}$ rešljiv. Rešimo oba sistema!

$$[A \mid \vec{a}, \vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & * & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$A\vec{x} = \vec{b}$ ima rešitve. Iz kanonične oblike preberemo:

$\vec{b} = -2\vec{v}_2 + \vec{v}_4$.

$A\vec{x} = \vec{a}$ nima rešitev, tj. $\vec{a} \notin V$.

b) (10) Poišči bazo vektorskega podprostora V in matriko A, da bo $V = C(A)$.

Iz zgornje Gaussove eliminacije vidimo, da so $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4$ linearno neodvisni.

$B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}$. $A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) (5) Poišči matriko L, da bo V ničelni prostor matrike L, tj. $V = N(L)$.

Iščemo L, da bo $L\vec{v}_1 = \vec{0}$, $L\vec{v}_2 = \vec{0}$, $L\vec{v}_4 = \vec{0}$.

Ena taka matrika L je $L = [0, 0, 1, -1]$. Ker je rang $L = 1$, je $\dim(N(L)) = 4 - 1 = 3 = \dim(V)$. Torej $N(L) = V$.

3. naloga (25 točk)

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) (15) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 3+\lambda & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

lastne vrednosti A

$$= -(3+\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) = -(3+\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2) = 0 \ \ldots \ \boxed{\lambda_1=-3,\ \lambda_2=-2,\ \lambda_3=1}.$$

Lastni vektorji A:

- $\lambda_1=-3$: $A+3I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boxed{\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$.

- $\lambda_2=-2$: $A+2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boxed{\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$.

- $\lambda_3=1$: $A-I = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boxed{\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$.

b) (5) Ali obstaja ortonormirana baza $\mathbb{R}^3$ sestavljena iz lastnih vektorjev matrike A? Če obstaja, jo zapiši, če ne obstaja, natančno utemelji, zakaj ne.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ so že ortogonalni. Še normiramo jih:

$$\boxed{\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{q}_1},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{q}_2},\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{q}_3} \right\}}.$$

ortonormirana baza $\mathbb{R}^3$

c) (5) Poišči singularni razcep (SVD) matrike A.

Iz (a) in (b) zaključimo $A = QDQ^T$, kjer je $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3]$ in $D = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

Če vzamemo $\boxed{U = Q}$, $\boxed{V = [-\vec{q}_1, -\vec{q}_2, \vec{q}_3]}$ in $\boxed{S = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}$,

potem $A = USV^T$. $\longleftarrow$ SVD za A

4. naloga (25 točk)

Podatke v tabeli

x	-2	-1	1	2
y	1	2	-1	1

želimo aproksimirati s funkcijo oblike $f(x) = ax^3 + bx$. Določi parametra a in b v smislu linearne metode najmanjših kvadratov, da bodo vrednosti f najbolje aproksimirale dane podatke.

$$\begin{aligned} f(-2) &= -8a - 2b = -1 \\ f(-1) &= -a - b = 2 \\ f(1) &= a + b = -1 \\ f(2) &= 8a + 2b = 1 \end{aligned} \quad \ldots \quad A = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pripadajoč normalni sistem $A^T A \vec{x} = A^T \vec{y}$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 1 & 8 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 & 34 \\ 34 & 10 \end{bmatrix}, \quad A^T \vec{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$\left[A^T A \mid A^T \vec{y}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 130 & 34 & -3 \\ 34 & 10 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -6 & -6 & 9 \\ 34 & 10 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3/2 \\ 0 & -24 & 48 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Torej $\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2 \end{bmatrix}$ in $f(x) = \frac{1}{2} x^3 - 2x$.