

Vpisna številka: _____

Ime in priimek: _____

Linearna algebra - teorija
1. 7. 2025

Pri nalogah, ki imajo možnost P(ravilno)/N(epravilno) napišite P oziroma N in kratko utemeljitev. Pri ostalih nalogah odgovorite na zastavljeno vprašanje.

Čas pisanja je 20 minut.

- (1) (P/N) Če za neničelna vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ velja $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$, potem sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna.

Ⓟ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0^\circ \text{ ali } \varphi = 180^\circ$
 $\Rightarrow \vec{a} \text{ in } \vec{b} \text{ sta kolinearna}$

- (2) Za kvadratno matriko A velja $A^2 = A + I$. Pokaži, da je $A^{-1} = A - I$.

$A(A - I) = A^2 - A = A + I - A = I \Rightarrow A - I = A^{-1}$

- (3) (P/N) Če ima za matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ enačba $Ax = 0$ samo trivialno rešitev, potem je $m \geq n$.

Ⓟ Če je $Ax = 0$, ima vrstično kanonično formo za A pivote v vseh stolpcih $\Rightarrow$ št. vrstic (m) $\geq$ št. stolpcov (n)

- (4) (P/N) Za poljubno matriko $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ velja, da so njeni stolpci linearno odvisni vektorji.

Ⓟ A ima 5 stolpcov, ki so vsi vektorji v $\mathbb{R}^4$
 $\Rightarrow$ so linearno odvisni

- (5) (P/N) Za poljubno matriko $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ obstajata taka linearno neodvisna vektorja $u, v \in \mathbb{R}^5$, da je $Au = Av = 0$.

(P) $\dim N(A) = 5 - \underbrace{\text{rang}(A)}_{\leq 3} \geq 2$

- (6) (P/N) Ravnina z enačbo $x - 2y + z = 0$ tvori vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.

(P)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ x' - 2y' + z' &= 0 \end{aligned} \Rightarrow (\alpha x + \beta x') - 2(\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') = 0$$

- (7) Vektorski prostor V dimenzije 6 je vsota vektorskih prostorov V_1 in V_2 , ki sta oba dimenzije 4. Izračunaj dimenzijo vektorskega prostora $V_1 \cap V_2$.

$$\begin{aligned} \dim V_1 \cap V_2 &= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 + V_2) = \\ &= 4 + 4 - 6 = 2 \end{aligned}$$

- (8) (P/N) Matriki, ki imata enak karakteristični polinom, sta si podobni.

(N) Npr. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ imata oba karakteristični polinom $p(x) = x^2$, vendar si nista podobni, saj je $PAP^{-1} = A$ za vse obrnljive matrike P .

- (9) (P/N) Za karakteristični polinom p_A matrike $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ velja $p_A(0) = 3$. Potem je matrika A obrnljiva.

(P) $p_A(0) = \det(A) = 3 \neq 0 \Rightarrow A$ obrnljiva

- (10) (P/N) Če za matriko $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ velja $\det(A) > 0$, ima A vsaj eno pozitivno (realno) lastno vrednost.

(P) $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$

$\rightarrow$ če so $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, je vsaj ena med njimi pozitivna

$\rightarrow$ če sta 2 lastni vrednosti (konjugirano) kompleksni, tj.

$\lambda_{1,2} = a \pm bi$, je $\lambda_1 \lambda_2 = a^2 + b^2 > 0 \Rightarrow \lambda_3 > 0$