

Rešitve: Linearna algebra – teorija
5. 6. 2026

- (1) (P/N) Za poljubna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ velja

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|.$$

Odgovor: P.

Po trikotniški neenakosti velja

$$\|\vec{u}\| = \|(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\| + \|\vec{v}\|.$$

Od tod sledi

$$\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|.$$

- (2) (P/N) Množica

$$U = \{(x, 0, 1); x \in \mathbb{R}\}$$

je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.

Odgovor: N.

Vektorski podprostor mora vsebovati ničelni vektor. Toda

$$(0, 0, 0) \notin U,$$

ker imajo vsi vektorji iz U tretjo komponento enako 1. Zato U ni podprostor.

- (3) (P/N) Produkt obrnljivih matrik je obrnljiva matrika.

Odgovor: P.

Če sta A in B obrnljivi, potem obstajata A^{-1} in B^{-1} . Za produkt velja

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

zato je tudi AB obrnljiva matrika.

- (4) Homogeni sistem n linearnih enačb za n neznank ima k -parametrično družino rešitev. Poišči rang matrike sistema.

Če ima homogeni sistem k parametrov, potem je

$$\dim N(A) = k.$$

Po izreku velja

$$\text{rang}(A) + \dim N(A) = n.$$

Zato je

$\text{rang}(A) = n - k.$

- (5) Naj bo A taka kvadratna matrika, da je $A^n = I$ za neko liho naravno število n . Izračunaj $\det(A)$.

Velja

$$\det(A^n) = \det(I) = 1.$$

Ker je

$$\det(A^n) = \det(A)^n,$$

dobimo

$$\det(A)^n = 1.$$

Ker je n liho in je $\det(A) \in \mathbb{R}$, je edina realna rešitev te enačbe

$\det(A) = 1.$

- (6) (P/N) Za poljubno matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ velja $\dim(N(A)) \geq 1$.

Odgovor: P.

Po izreku velja

$$\text{rang}(A) + \dim(N(A)) = n + 1.$$

Ker je $\text{rang}(A) \leq n$, sledi

$$\dim(N(A)) = n + 1 - \text{rang}(A) \geq n + 1 - n = 1.$$

- (7) Vektorski prostor dimenzije 8 je vsota podprostorov U in V z $\dim(U) = 5$ in $\dim(V) = 6$. Izračunaj $\dim(U \cap V)$.

Ker je cel prostor vsota $U + V$ in ima dimenzijo 8, velja

$$\dim(U + V) = 8.$$

Uporabimo formulo

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

Torej

$$8 = 5 + 6 - \dim(U \cap V),$$

od koder sledi

$\dim(U \cap V) = 3.$

(8) (P/N) Matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se da diagonalizirati.

Odgovor: N.

Karakteristični polinom je

$$(\lambda - 1)^2,$$

torej je edina lastna vrednost $\lambda = 1$ z algebraično večkratnostjo 2. Ker je

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

je $\dim N(A) = 1$, torej obstaja samo en (linearno neodvisni) lastni vektor in zato matrika ni diagonalizabilna.

(9) (P/N) Naj bo A simetrična matrika. Obstajata taka njena lastna vektorja v, w , ki pripadata različnim lastnim vrednostim, da je $v^T w \neq 0$.

Odgovor: N.

Za simetrično matriko velja, da so lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, ortogonalni.

(10) (P/N) Produkt dveh ortogonalnih kvadratnih matrik je ortogonalna matrika.

Odgovor: P.

Naj bosta A in B ortogonalni, torej

$$A^T A = I, \quad B^T B = I.$$

Tedaj

$$(AB)^T (AB) = B^T A^T AB = B^T IB = B^T B = I.$$

Zato je tudi AB ortogonalna matrika.