

Rešitve: Linearna algebra – teorija
19. 6. 2026

- (1) (P/N) Če za neničelna vektorja $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ velja $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, potem sta $\vec{u}$ in $\vec{v}$ linearno neodvisna.

Odgovor: P.

Če bi bila linearno odvisna, bi veljalo $\vec{u} = \lambda \vec{v}$. Potem

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} \cdot \vec{v} = \lambda \|\vec{v}\|^2.$$

Ker je $\vec{v} \neq 0$, je $\|\vec{v}\|^2 > 0$, zato bi iz $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ sledilo $\lambda = 0$, kar je v protislovju z $\vec{u} \neq 0$. Torej sta linearno neodvisna.

- (2) Poišči primer matrike A , za katero je $A^3 = 0$ in $A^2 \neq 0$.

Vzemimo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tedaj

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \quad A^3 = 0.$$

- (3) (P/N) Produkt nilpotentnih matrik je nilpotentna matrika.

Odgovor: N.

Protiprimer:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obe matriki sta nilpotentni, vendar

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kar ni nilpotentna matrika.

- (4) (P/N) Če je n liho število in za $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ velja $A^T = -A$, potem je $\det(A) = 0$.

Odgovor: P.

Velja

$$\det(A^T) = \det(A), \quad \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

Ker je $A^T = -A$, dobimo

$$\det(A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

Ker je n liho, je $(-1)^n = -1$, zato

$$\det(A) = -\det(A),$$

od koder sledi $\det(A) = 0$.

(5) (P/N) Množica

$$U = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 = 0\}$$

je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^2$.

Odgovor: N.

Pogoj $x^2 - y^2 = 0$ pomeni $(x - y)(x + y) = 0$, torej $x = y$ ali $x = -y$. Množica je unija dveh premic, ki ni zaprta za seštevanje (npr. $(1, 1)$ in $(1, -1)$ sta v U , njuna vsota $(2, 0)$ pa ni). Zato U ni podprostor.

(6) Naj bo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dana s

$$T(x, y, z) = (y - z, x + z, x - y).$$

Zapiši matriko za T v standardnih bazah.

Izračunamo slike baznih vektorjev:

$$T(1, 0, 0) = (0, 1, 1), \quad T(0, 1, 0) = (1, 0, -1), \quad T(0, 0, 1) = (-1, 1, 0).$$

Matrika preslikave je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(7) (P/N) Če je $A^2 = I$, potem sta njeni lastni vrednosti lahko le -1 in 1 .

Odgovor: P.

Če je $Av = \lambda v$, potem

$$A^2v = v \Rightarrow \lambda^2 v = v,$$

zato

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0,$$

torej $\lambda = -1$ ali $\lambda = 1$.

(8) (P/N) Če je 0 lastna vrednost matrike A , potem matrika A ni obrnljiva.

Odgovor: P.

Determinanta matrike je enaka produktu njenih lastnih vrednosti. Torej je $\det(A) = 0$, zato A ni obrnljiva.

- (9) **(P/N)** Naj bo p polinom. Če se matriko A da diagonalizirati, potem se tudi $p(A)$ da diagonalizirati.

Odgovor: P.

Če je $A = PDP^{-1}$, kjer je D diagonalna, potem

$$p(A) = P p(D) P^{-1},$$

kjer je $p(D)$ diagonalna matrika. Zato je tudi $p(A)$ diagonalizabilna.

- (10) **(P/N)** Matrika

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & \sqrt{11} \\ \sqrt{5} & \sqrt{11} & \sqrt{13} \end{bmatrix}$$

se da diagonalizirati.

Odgovor: P.

Matrika je simetrična. Vsaka (realna) simetrična matrika se da diagonalizirati.