UNIVERZA V LJUBLJANI

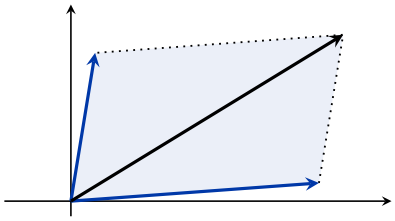
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

LABORATORIJ ZA MATEMATIČNE METODE V RAČUNALNIŠTVU IN INFORMATIKI

Aleksandra Franc

REŠENE NALOGE IZ LINEARNE ALGEBRE

Študijsko gradivo



Ljubljana • 2026

Rešene naloge iz Linearne algebre

Študijsko gradivo za predmet Linearna algebra (63207)

Aleksandra Franc
Fakulteta za računalništvo in informatiko, Univerza v Ljubljani

© Kopiranje in razmnoževanje besedila ali njegovih delov ter slik je dovoljeno samo z odobritvijo avtorjev knjige.

Ljubljana, 1. november 2026

Uvod

Naloge na naslednjih straneh so večinoma prirejene iz nalog, ki so se pojavljale na kolokvijih pri predmetu Linearna algebra za študente univerzitetnega študija računalništva in informatike na FRI med letoma 2012 in 2019.

Pri sestavljanju nalog za kolokvije so sodelovali številni asistenti, ki so na FRI poučevali ali še poučujejo ta predmet, za kar se jim iskreno zahvaljujem. Posebej so k nalogam prispevali Damir Franetič, Gregor Jerše, Peter Kink, Jelena Klisara, Janoš Vidali, Damjan Vrenčur in Martin Vuk.

Za lažjo navigacijo po dokumentu so na voljo bližnjice. Če kliknete na simbol ⇩ ob nalogi, boste skočili do rešitve. Če kliknete na simbol ⇧ ob rešitvi, se boste vrnili k besedilu naloge. Vseeno priporočam, da nalogi posvetite nekaj časa, preden se lotite branja rešitve.

Ta zbirka vaj ni učbenik. Informacije v okvirjih so tam le zato, da vas spomnijo na nekaj najpomembnejših dejstev, ki jih boste morali pri danem sklopu nalog znati in nikakor ne predstavljajo 100% vsega, kar morate znati in razumeti pri tem predmetu. Priporočam, da si pred reševanjem vsakega sklopa preberete ustrezno poglavje v učbeniku [1]. Tam je teorija iz okvirjev natančno razložena in reševanje kolokvijskih nalog bo veliko lažje, če jo boste razumeli.

Na skicah v prvem poglavju so v nekaterih primerih narisane povsem pravilne točke, premice in ravnine, v večini primerov pa skica le prikazuje medsebojne odnose geometrijskih objektov, ne pa tudi pravilnih razmerij, kotov in razdalj, ker tako natančna skica za rešitev naloge ni potrebna. Kot je rekel slavni francoski matematik Henri Poincaré, je geometrija umetnost pravilnega sklepanja z uporabo napačnih skic.

Oznake

$\mathbb{N}$ ... naravna števila

$\mathbb{R}$ ... realna števila

$\mathbb{C}$ ... kompleksna števila

bfa ... vektor

$\overrightarrow{AB}$ ... vektor z začetkom v A in koncem v B

$\vec{r}_A$ ... krajevni vektor točke A

$\|bfa\|$ ... dolžina (norma) vektorja $\vec{a}$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ ... skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ... vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$

$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ ... mešani produkt vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$

S_{ABC} ... ploščina trikotnika ABC

A ... matrika

A^{T} ... transponiranka matrike A

$\det A$ ... determinanta matrike A

$C(A)$ ... stolpični prostor matrike A (slika preslikave A)

$N(A)$ ... ničelni prostor matrike A (jedro preslikave A)

V ... vektorski (pod)prostor

$V^{\perp}$ ... ortogonalni komplement prostora V

Kazalo

Uvod 3

Oznake 5

Poglavje 1. Vektorji in geometrija 9
Naloge za preverjanje razumevanja 9
Kolokvijske naloge 12

Poglavje 2. Sistemi linearnih enačb 17
Naloge za preverjanje razumevanja 17
Kolokvijske naloge 19

Poglavje 3. Matrike in sistemi 23
Naloge za preverjanje razumevanja 23
Kolokvijske naloge 24

Poglavje 4. Determinante 29
Naloge za preverjanje razumevanja 29
Kolokvijske naloge 30

Poglavje 5. Vektorski prostori in linearne preslikave 33
Naloge za preverjanje razumevanja 33
Kolokvijske naloge 34

Poglavje 6. Ortogonalnost 39
Naloge za preverjanje razumevanja 39
Kolokvijske naloge 40

Poglavje 7. Lastne vrednosti 47
Naloge za preverjanje razumevanja 47
Kolokvijske naloge 48

Rešitve 55
1. Vektorji in geometrija 55
2. Sistemi linearnih enačb 81
3. Matrike in sistemi 89
4. Determinante 100
5. Vektorski prostori in linearne preslikave 108
6. Ortogonalnost 124
7. Lastne vrednosti 141

Literatura 165

POGLAVJE 1

Vektorji in geometrija

Naloge za preverjanje razumevanja

Kolinearnost

Vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ sta **kolinearna**, če obstaja $\alpha \in \mathbb{R}$, da je $\vec{y} = \alpha\vec{x}$ ali pa $\vec{x} = \alpha\vec{y}$.

Naloga 1.

Za vsak par vektorjev ugotovi, ali sta kolinearna:

a. $\vec{a} = [3, 6, 9]^\mathsf{T}$ in $\vec{b} = [1, 2, 3]^\mathsf{T}$,
b. $\vec{a} = [1, 0, -2, 1]^\mathsf{T}$ in $\vec{b} = [2, -4, 0, 3]^\mathsf{T}$,
c. $\vec{a} = [-\frac{5}{3}, \frac{3}{2}]^\mathsf{T}$ in $\vec{b} = [10, -9]^\mathsf{T}$,
d. $\vec{a} = [1, -3]^\mathsf{T}$ in $\vec{b} = \vec{0}$.

Dolžina vektorja

Dolžina vektorja $\vec{x} = [x_1, \ldots, x_n]^\mathsf{T}$ je

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Naloga 2.

Dani so vektorji $\vec{a} = [3, -4]^\mathsf{T}$, $\vec{b} = [2, -2, 1]^\mathsf{T}$ in $\vec{c} = [1, 0, -4, 1]^\mathsf{T}$. Izračunaj $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ in $\|\vec{c}\|$.

Skalarni produkt

Naj bo $\vec{x} = [x_1, \ldots, x_n]^\mathsf{T}$ in $\vec{y} = [y_1, \ldots, y_n]^\mathsf{T}$. **Skalarni produkt** vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{y}$ je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^\mathsf{T}\vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Pri tem je $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ natanko tedaj, ko sta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ pravokotna.

Vektorski produkt

Vektorski produkt vektorjev $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}$ in $\vec{y} = [y_1, y_2, y_3]^\mathsf{T}$ je

$$\vec{x} \times \vec{y} = [x_2y_3 - x_3y_2, -(x_1y_3 - x_3y_1), x_1y_2 - x_2y_1]^\mathsf{T}.$$

Dolžina vektorskega produkta $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ je enaka ploščini paralelograma, napetega na vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$. Pri tem je $\vec{x} \times \vec{y} = 0$ natanko tedaj, ko sta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ linearno odvisna. Velja še $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.

Mešani produkt

Za vektorje $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ lahko izračunamo **mešani produkt**

$$\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} \in \mathbb{R}.$$

Dolžina mešanega produkta $|\langle \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \rangle|$ je enaka volumnu paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{x}$, $\vec{y}$ in $\vec{z}$.

Naloga 3.

Naj bo $\vec{a} = [1, 0, 2]^\mathsf{T}$, $\vec{b} = [-1, 1, 3]^\mathsf{T}$ in $\vec{c} = [-3, 1, 4]^\mathsf{T}$. Izračunaj skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$, vektorski produkt $\vec{b} \times \vec{c}$ ter mešana produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ in $(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$.

Koti

Naj označuje φ kot med vektorjema $\vec{x}$ in $\vec{y}$. Potem je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \varphi$$

in

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \varphi.$$

Naloga 4.

Za vsak par vektorjev izračunaj kot med njima:

a. $\vec{a} = [1, 2]^\mathsf{T}$, $\vec{b} = [-2, 1]^\mathsf{T}$,
b. $\vec{c} = [1, -1]^\mathsf{T}$, $\vec{d} = [2, 0]^\mathsf{T}$,
c. $\vec{e} = [2, -1, 1]^\mathsf{T}$, $\vec{f} = [1, 1, 2]^\mathsf{T}$.

Premice v $\mathbb{R}^3$

Premica s smernim vektorjem $\vec{p} = [a, b, c]^\mathsf{T}$ skozi točko $A(x_0, y_0, z_0)$ ima parametrično enačbo

$$\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kanonična oblika enačbe te premice je

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

če je $a, b, c \neq 0$. Če je katera od komponent smernega vektorja $\vec{p}$ enaka 0, moramo pripadajoči del enačbe zapisati drugače. Na primer, če je $a, b \neq 0$ in $c = 0$, bo kanonična oblika enačbe premice

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},\ z = z_0.$$

Naloga 5.

Poišči parametrično in kanonično enačbo premice, ki ima smerni vektor $\vec{p} = [5, 2, -6]^\mathsf{T}$ in gre skozi točko $A(2, 2, -3)$.

Naloga 6.

Dani sta premici

$$p\colon \frac{x+1}{2} = \frac{1-y}{3} = z + 1 \quad \text{in} \quad q\colon [1, 0, -4]^\mathsf{T} + t[2, -3, 2]^\mathsf{T}.$$

Poišči smerna vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$, nato pa za vsako od premic še eno točko, ki leži na njej.

Ravnine v $\mathbb{R}^3$

Ravnina z normalo $\vec{n} = [a, b, c]^\mathsf{T}$ skozi točko $A(x_0, y_0, z_0)$ ima enačbo

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0.$$

Če označimo $d = \vec{r}_A \cdot \vec{n} = ax_0 + by_0 + cz_0$, lahko enačbo te ravnine zapišemo kot

$$ax + by + cz = d.$$

Naloga 7.

Poišči enačbo ravnine z normalo $\vec{n} = [1, -2, 3]^\mathsf{T}$, ki gre skozi točko $A(5, 0, -2)$.

Naloga 8.

Dani sta ravnini

$$\Sigma\colon 2x + 3y - z = 1 \quad \text{in} \quad \Lambda\colon x - 3z = 5.$$

Poišči normali $\vec{n}_\Sigma$ in $\vec{n}_\Lambda$, nato pa za vsako od ravnin določi še eno točko, ki leži na njej.

Razdalja med točko in premico

Razdalja točke P do premice p skozi točko A s smernim vektorjem $\vec{p}$ je

$$d(P,p) = \frac{\|\vec{p} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_A)\|}{\|\vec{p}\|}.$$

Razdalja med točko in ravnino

Razdalja točke P do ravnine Σ skozi točko A z normalo $\vec{n}$ je

$$d(P,\Sigma) = \frac{\left|\vec{n} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_A)\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Naloga 9.

Dani so točka $P(3,1,1)$, premica

$$p\colon \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{2-z}{4}$$

in ravnina

$$\Sigma\colon 2x + 2y - z = 4.$$

Poišči razdalji $d(P,p)$ in $d(P,\Sigma)$.

Kolokvijske naloge

Naloga 10.

Dani sta premici

$$p\colon x - 7 = \frac{y-1}{2} = z + 1 \quad \text{in} \quad q\colon -\frac{x}{2} = \frac{1-y}{3} = z + 1.$$

a. Poišči ravnino Σ, ki je vzporedna premici p in vsebuje premico q.
b. Določi pravokotno projekcijo A' točke $A(7,1,-1)$ na ravnino Σ.
c. Zapiši enačbo pravokotne projekcije p' premice p na ravnino Σ.

Naloga 11.

Tabornik Polde je napel trikotni kos šotorskega platna med točke $A(0,0,0)$, $B(0,3,0)$ in $C(0,3,2)$ ter postavil svetilko v točko $S(3,-1,4)$. Platno na ravnino $z = 0$ meče trikotno senco.

a. Katere od točk A, B in C ležijo na ravnini z enačbo $z = 0$?
b. Določi točke A', B' in C', ki predstavljajo oglišča sence. (Namig: Določi točke, v katerih premice skozi S in A, B ali C sekajo ravnino $z = 0$.)
c. Izračunaj ploščino sence $A'B'C'$.

Naloga 12.

Oglišča tetraedra $ABCD$ so podana s koordinatami

$$A(0,0,0), \quad B(2,1,0), \quad C(0,2,1) \quad \text{in} \quad D(3,1,5).$$

a. Določi enačbo ravnine Σ, ki vsebuje trikotnik ABC.
b. Določi enačbo premice p, ki vsebuje točko D in je pravokotna na Σ.
c. Poišči presečišče D' ravnine Σ in premice p.
d. Izračunaj prostornino tetraedra $ABCD$.

Naloga 13.
Dani sta ravnina

$$\Sigma\colon 2x + y + 2z = 9$$

in premica

$$p\colon x = 3, y = z.$$

a. Izračunaj kot med premico p in ravnino Σ.
b. Poišči presečišče premice p in ravnine Σ.
c. Poišči pravokotno projekcijo premice p na ravnino Σ.

Naloga 14.
Prostorski štirikotnik $ABCD$ je podan z naslednjimi koordinatami:

$$A(3,6,3),\quad B(6,3,9),\quad C(-3,3,6)\quad \text{in}\quad D(-3,6,6).$$

a. Ali točke A, B, C in D ležijo na isti ravnini?
b. Projiciraj točke A, B, C in D na ravnino $\Lambda\colon x + y - z = 0$.
c. Ali se projekciji daljic AD in BC sekata? Določi morebitno presečišče!

Naloga 15.
Dana je ravnina Σ na kateri ležijo točke $A(2,1,0)$, $B(0,1,-1)$ in $C(2,3,1)$.

a. Zapiši enačbo ravnine Σ.
b. Določi premico p, ki gre skozi točko $T(1,2,3)$ in je pravokotna na ravnino Σ.
c. Izračunaj razdaljo točke T od ravnine Σ.

Naloga 16.
Dane so točke $A(3,1,2)$, $B(6,4,5)$ in $C(9,-2,-1)$.

a. Izračunaj kot med daljicama AB in AC.
b. Določi težišče trikotnika ABC.
c. Zapiši enačbo premice, ki je pravokotna na trikotnik ABC in vsebuje njegovo težišče.

Naloga 17.
Premici p in q sta dani z enačbama

$$p\colon x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}\quad \text{in}\quad q\colon \frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{2} = -z.$$

a. Poišči presečišče premic p in q.
b. Pod kakšnim kotom se sekata p in q?
c. Zapiši enačbo ravnine Σ, v kateri ležita p in q.

Naloga 18.
Ravnini Σ in Λ sta dani z enačbama

$$\Sigma\colon x + y - 2z = 0\quad \text{in}\quad \Lambda\colon x + 2y - z = 1.$$

a. Poišči parametrizacijo premice p, ki je presek ravnin Σ in Λ.

b. Naj bo Λ' ravnina, ki jo dobiš z zrcaljenjem ravnine Λ preko ravnine Σ. Poišči enačbo ravnine Λ'.

Naloga 19.

Dani sta premica p in ravnina Σ:

$$\begin{aligned} p &: \quad x = \frac{y-1}{2} = z - 1, \\ \Sigma &: \quad x - 2y + 2z = 1. \end{aligned}$$

a. Poišči presečišče P premice p in ravnine Σ.
b. Določi kot pod katerim se sekata p in Σ.
c. Prezrcali premico p preko ravnine Σ.

Naloga 20.

V $\mathbb{R}^3$ so dane točke $A(2,1,4)$, $B(0,0,2)$, $C(1,2,0)$ in $D(3,3,2)$.

a. Pokaži, da je lik $ABCD$ kvadrat in izračunaj njegovo ploščino.
b. Poišči preostala oglišča kocke, ki ima kvadrat $ABCD$ za eno od ploskev. Koliko je takih kock?
c. Zapiši enačbo premice, ki gre skozi točko A in vsebuje telesno diagonalo kocke.

Naloga 21.

Dane so točke $A(2,0,4)$, $B(3,2,2)$ in $C(1,1,0)$.

a. Določi koordinate točke D tako, da bo lik $ABCD$ pravokotnik.
b. Poišči enačbo premice p, na kateri leži diagonala BD pravokotnika $ABCD$.
c. Poišči enačbo ravnine Σ, ki je pravokotna na premico p in vsebuje točko A.

Naloga 22.

Naj bo vektor $\vec{p}$ pravokotna projekcija vektorja $\vec{u} = [6,0,3]^\mathsf{T}$ na vektor $\vec{a} = [2,2,-1]^\mathsf{T}$.

a. Izračunaj vektor $\vec{p}$.
b. Ali je $\vec{p}$ normala na ravnino Σ z enačbo $4x + 4y - 2z = 0$?
c. Poišči pravokotno projekcijo $\vec{q}$ vektorja $\vec{u}$ na ravnino Σ.

Naloga 23.

Premica p gre skozi točko $A(1,1,3)$ in ima smerni vektor $\vec{p} = [2,1,3]^\mathsf{T}$. Naj bo Σ ravnina, ki vsebuje premico p in točko $B(2,1,4)$.

a. Zapiši kanonsko enačbo premice p.
b. Poišči enačbo ravnine Σ.

Naloga 24.

Premica p gre skozi točko $A(1,1,0)$ in ima smerni vektor $\vec{p} = [0,1,-1]^\mathsf{T}$. Premica q je podana z enačbo

$$q\colon \frac{x+5}{2} = y - 5 = \frac{2-z}{2}.$$

Naj bo Σ ravnina, ki vsebuje premico p in je vzporedna s premico q.

a. Poišči enačbo ravnine Σ.
b. Poišči pravokotno projekcijo $\vec{v}'$ vektorja $\vec{v} = [-3,3,3]^\mathsf{T}$ na ravnino Σ.

Naloga 25.
V $\mathbb{R}^3$ so dane točke $A(1,0,-1)$, $B(1,2,3)$ in $C(-1,4,5)$.

a. Poišči koordinate take točke D, da bo $ABCD$ paralelogram.
b. Določi enačbo ravnine Σ, v kateri leži paralelogram $ABCD$.
c. Poišči še parametrizacijo premice p, ki je pravokotna na paralelogram $ABCD$ in gre skozi njegovo središče.

Naloga 26.
Dani so vektorja $\vec{u} = [1,1,0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v} = [2,2,1]^\mathsf{T}$ ter točka $A(1,3,5)$.

a. Zapiši enačbi premic p in q, ki se sekata v točki A in sta vzporedni $\vec{u}$ in $\vec{v}$.
b. Zapiši enačbo ravnine Σ, ki vsebuje premici p in q.
c. Zapiši enačbe vseh ravnin, ki so od Σ oddaljene za $\sqrt{2}$. Koliko je takih ravnin?

Naloga 27.
Dane so točke $A(0,-1,3)$, $B(4,0,2)$ in $C(2,0,3)$.

a. Izračunaj ploščino trikotnika ABC.
b. Določi enačbo ravnine skozi A, B in C.
c. Zapiši enačbo premice, ki je pravokotna na trikotnik ABC in gre skozi točko A.

Naloga 28.
Ravnine Σ_1, Σ_2 in Σ_3 so podane z enačbami

$$\Sigma_1 \colon 2x - y - 2z = 3,$$
$$\Sigma_2 \colon 3x + y + 2z = 2,$$
$$\Sigma_3 \colon x - y - 5z = -4.$$

Naj bo premica p presečišče ravnin Σ_1 in Σ_2.

a. Zapiši enačbo premice p.
b. Določi presečišče P premice p in ravnine Σ_3.
c. Izračunaj kot med premico p in ravnino Σ_3.

Naloga 29.
Na ravnini Σ ležijo točke $A(1,-1,3)$, $B(2,1,1)$ in $C(1,-1,0)$.

a. Poišči enačbo ravnine Σ.
b. Določi enačbo premice p, ki poteka skozi točki A in $D(1,4,3)$.
c. Določi pravokotno projekcijo premice p na ravnino Σ.

Naloga 30.
Dani sta ravnina $\Sigma \colon x + y = 5$ in premica

$$p \colon x - 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2}.$$

a. Izračunaj kot med ravnino Σ in premico p.
b. Določi presečišče ravnine Σ in premice p.
c. Zapiši enačbo ravnine Σ', ki vsebuje premico p in je pravokotna na ravnino Σ.

Naloga 31.
Naj bo p premica s parametrizacijo

$$p \colon \vec{r}(t) = [1,0,1]^\mathsf{T} + t[1,2,1]^\mathsf{T}.$$

a. Poišči enačbo ravnine Σ, ki je pravokotna na p in gre skozi točko $A(1,1,1)$.
b. Poišči enačbo ravnine Λ, ki vsebuje premico p in gre skozi točko $A(1,1,1)$.
c. Zapiši parametrizacijo premice q, ki je presek ravnin Σ in Λ.

Naloga 32.

Dane so točke $A(3,2,1)$, $B(3,0,-1)$ in $C(1,1,1)$ ter premica p z enačbo

$$p\colon \frac{x-4}{2} = -y-2 = z-1.$$

a. Izračunaj ploščino S_{ABC} trikotnika ABC.
b. Določi enačbo ravnine Σ, ki vsebuje točko A in premico p.
c. Izračunaj projekcijo B' točke B na premico p.

Naloga 33.

Dani sta ravnini

$$\Sigma\colon x+2y-3z=3 \quad \text{in} \quad \Lambda\colon x-y=3.$$

a. Poišči parametrizacijo premice p, ki je presek ravnin Σ in Λ.
b. Poišči enačbo ravnine Σ', ki jo dobiš, če ravnino Σ zavrtiš okrog premice p za 90 stopinj.

Naloga 34.

Dani sta ravnina Σ in premica p z enačbama

$$\Sigma\colon 2x-y+z=3 \quad \text{in} \quad p\colon \frac{x-2}{3} = -y = \frac{z+1}{2}.$$

a. Poišči koordinate točke T, v kateri premica p seka ravnino Σ.
b. Poišči parametrizacijo premice q, ki leži v ravnini Σ in seka premico p pod pravim kotom.
c. Poišči enačbo ravnine Λ, ki vsebuje premico p in seka ravnino Σ pod pravim kotom.

POGLAVJE 2

Sistemi linearnih enačb

Naloge za preverjanje razumevanja

Sistem linearnih enačb

Sistem enačb, ki ga lahko zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

kjer so a_{ij} in b_i $(i = 1, \ldots m, j = 1, \ldots, n)$ dana števila in x_j $(j = 1, \ldots, n)$ neznanke, imenujemo **sistem m linearnih enačb z n neznankami**. Zapišemo ga lahko tudi v matrični obliki $A\vec{x} = \vec{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Naloga 35.

Za vsakega od spodnjih sistemov ugotovi, ali je linearen.

a. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -1, \\ 5x_1 + 2x_2 &= 8. \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} x_1x_2 - 3x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2x_3 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2. \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= \pi - x_3, \\ 2x_1 - 2x_3 &= e. \end{aligned}$

d. $\begin{aligned} x_1 + \cos(x_2) - 3x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - e^{x_3} &= -8. \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)x_3 &= 2, \\ (\sqrt{17} + \cos\pi)x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 &= 1. \end{aligned}$

Naloga 36.

Vse linearne sisteme iz prejšnje naloge zapiši v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$.

Število rešitev

Za število rešitev sistema linearnih enačb velja naslednje:

- lahko se zgodi, da sistem nima rešitev (enačbe so protislovne),
- lahko se zgodi, da ima sistem natanko eno rešitev (je **enolično rešljiv**),
- lahko se zgodi, da ima sistem neskončno rešitev, ki pa jih lahko izrazimo s končno mnogo parametri.

Če je število enačb manjše od števila neznank, potem sistem ne more biti enolično rešljiv.

Naloga 37.

Za vsakega od spodnjih sistemov poskušaj vnaprej napovedati število rešitev, nato pa poišči vse rešitve.

a. $\begin{aligned} x + y &= 3, \\ x - y &= 1. \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} x + y &= 3, \\ x - y &= 1, \\ 5x + y &= 11. \end{aligned}$

c. $x + y = 3.$

d. $\begin{aligned} x + y &= 3, \\ 2x + 2y &= 6. \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} x + y &= 3, \\ 2x + 2y &= 6, \\ -x - y &= -3. \end{aligned}$

f. $\begin{aligned} x + y &= 3, \\ x + y &= 5. \end{aligned}$

g. $\begin{aligned} x + y &= 3, \\ x - y &= 1, \\ 5x - y &= 7. \end{aligned}$

Postopek reševanja

Pri reševanju sistema lahko

- enačbo pomnožimo (delimo) z neničelnim številom,
- enačbi prištejemo (odštejemo) večkratnik druge enačbe,
- iz enačbe izrazimo eno od spremenljivk in jo v vseh ostalih enačbah zamenjamo z dobljenim izrazom.

Namesto tega lahko na razširjeni matriki sistema

$$\left[A \mid \vec{b}\right].$$

naredimo **Gaussovo eliminacijo**, pri kateri lahko delamo naslednje elementarne operacije na vrsticah:

- zamenjamo dve vrstici,
- pomnožimo vrstico z neničelnim skalarjem,
- vrstici prištejemo večkratnik druge vrstice.

Ko z dovoljenimi operacijami pridemo do matrike, ki je zgornjetrikotna, lahko rešitev sistema dobimo s postopnim izražanjem neznank od spodaj navzgor. Izražanje je še lažje, če uspemo z dovoljenimi operacijami uničiti še nekaj elementov nad diagonalo. Če je sistem enolično rešljiv, lahko z dovoljenimi operacijami v razširjeni matriki matriko A nadomestimo z identiteto in iz zadnjega stolpca razširjene matrike preberemo rešitev sistema.

Naloga 38.

Spodnja sistema reši s premetavanjem enačb.

a. $\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ 2x - y - z &= 9, \\ x - z &= 4. \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ 2x - y - z &= 9. \end{aligned}$

Naloga 39.

Spodnja sistema reši s pomočjo Gaussove eliminacije.

a. $\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ 2x - y - z &= 9, \\ x - z &= 4. \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ 2x - y - z &= 9. \end{aligned}$

Kolokvijske naloge

Naloga 40.

Podan je sistem enačb

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 3, \\ x + 3y - z &= 4, \\ 2x + 3y + (a-1)z &= 5. \end{aligned}$$

a. Kako sta rešljivost in število rešitev odvisni od parametra $a \in \mathbb{R}$?
b. V odvisnosti od a zapiši rešitve danega sistema.

Naloga 41.
Poišči štiri števila, za katera velja:

- njihova vsota je enaka 4,
- razlika med prvim in vsoto ostalih je enaka 3,
- razlika med vsoto prvih dveh in vsoto zadnjih dveh je enaka 2 in
- razlika med vsoto prvih treh in zadnjim je enaka 1.

Naloga 42.
Dani so vektorji

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Določi tak vektor $\vec{v} = [x, y, z, w]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^4$, ki je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in za katerega velja $\vec{c} \cdot \vec{v} = \vec{d} \cdot \vec{v} = 1$.

Naloga 43.
Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} 3x &+ & 3y &+ z &= 5, \\ -x &+ (a^2-2)y & & &= a, \\ 2x &+ & 2y &+ z &= 4. \end{aligned}$$

a. Za katere vrednosti parametra a ima več rešitev? Poišči te rešitve.
b. Za katere vrednosti parametra a nima nobene rešitve?
c. Za katere vrednosti parametra a ima enolično rešitev? Poišči jo.

Naloga 44.
Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} x &+ & y & & &= 1, \\ -x &+ & y &+ (a-2)z &= -1, \\ &+ (a-2)y &+ & 2z &= 0. \end{aligned}$$

a. Sistem zapiši v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$. Za katere a je sistem enolično rešljiv?
b. Poišči rešitve sistema za vse tiste vrednosti parametra a, pri katerih sistem ni enolično rešljiv.
c. Poišči rešitve sistema za vse tiste vrednosti parametra a, pri katerih sistem je enolično rešljiv.

Naloga 45.
Spodnji sistem linearnih enačb zapiši v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$ in ga reši z uporabo Gaussove

eliminacije.

$$\begin{aligned} x &+ 2y &+ 2z &+ 3w &= 3,\\ 2x & & - z & - w &= 2,\\ x &+ 2y &+ 6z & - w &= 3,\\ x &- 2y &+ 5z & - 12w &= -1. \end{aligned}$$

Naloga 46.

Dani so matrika A in vektorja $\vec{b}_1$ ter $\vec{b}_2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 3\\ 2\\ 1\\ 1 \end{bmatrix}.$$

a. Ali obstaja vektor $\vec{x}_1$, da je $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$? Ali obstaja vektor $\vec{x}_2$, da je $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$?
b. Poišči vse rešitve sistemov $A\vec{x} = \vec{b}_1$ ter $A\vec{x} = \vec{b}_2$.

Naloga 47.

Reši spodnji sistem enačb z uporabo Gaussove eliminacije.

$$\begin{aligned} x &+ y &+ 2z & &= 5,\\ x & & & + w &= 0,\\ x &+ 3y & + z &+ w &= 5,\\ x & & & + 3w &= 0. \end{aligned}$$

Naloga 48.

Poišči vse rešitve sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4\\ 0\\ 4 \end{bmatrix}.$$

Poišči še rešitev $\vec{x}$, ki ima vsoto komponent enako 0.

Naloga 49.

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & u & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} v\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešujemo sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$. Za katere vrednosti parametrov u in v ima sistem eno rešitev, nič rešitev ali neskončno rešitev?

Naloga 50.

Dan je sistem enačb

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1, \\ y + 2z &= -1, \\ 3x + y + (3a^2 - 6)z &= 4. \end{aligned}$$

a. Sistem zapiši v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$.
b. Za katere a sistem ni rešljiv? Za katere a je enolično rešljiv?
c. Poišči rešitve sistema pri $a = -\sqrt{2}$.
d. Pri katerem a je $y = 3$ rešitev sistema?

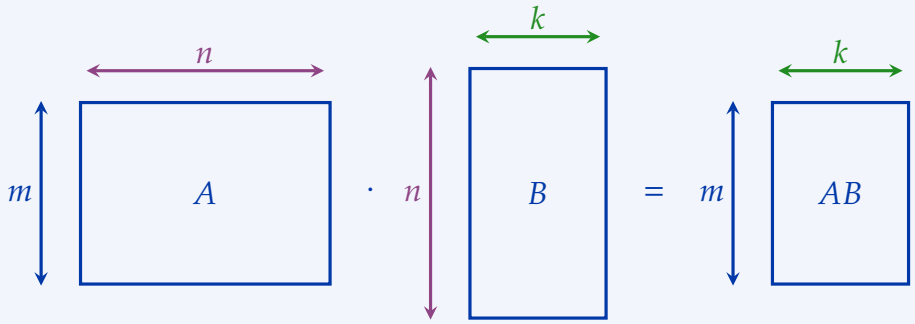
POGLAVJE 3

Matrike in sistemi

Naloge za preverjanje razumevanja

Seštevanje in množenje matrik

Seštevanje matrik je **komutativno**: $A + B = B + A$ za poljubni matriki A in B. Seštevamo lahko le matrike iste dimenzije.
Množenje matrik **ni komutativno**: matrika AB v splošnem ni enaka matriki BA. Zato ni vseeno, če z matriko množimo z leve ali z desne strani. Matriki lahko pomnožimo, če je število stolpcev prve matrike enako številu vrstic druge matrike. Rezultat je matrika, ki ima toliko vrstic kot prva matrika in toliko stolpcev kot druga matrika.



Naloga 51.
Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj AB in BA. Ali sta rezultata enaka?

Naloga 52.
Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Preveri, ali sta produkta AB in BA definirana. Če sta definirana, ju izračunaj in primerjaj dimenziji obeh dobljenih matrik.

Reševanje matričnih enačb

Pri reševanju matričnih enačb želimo običajno uporabiti dejstvo, da za obrnljivo matriko A velja $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Ker množenje ni komutativno, v izrazu oblike ABA^{-1} matrik A in A^{-1} ne moremo pokrajšati.
Pomembna posledica nekomutativnosti množenja matrik je še, da moramo inverz produkta računati po formuli $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Seveda tak inverz obstaja le v primeru, ko sta matriki A in B obrnljivi.

Naloga 53.
Naj bosta A in B obrnljivi $n \times n$ matriki in C poljubna $n \times n$ matrika. Naslednje izraze čimbolj poenostavi:

a. $ABA^{-1}AB^{-1}A$,
b. $B^{-1}A^{-1}ABCB^{-1} - ACB^{-1}$,
c. $A^2 + 2AB + B^2 - (A + B)^2$.

Kolokvijske naloge

Naloga 54.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo $(2A + B)X = A(X + I)$.

Naloga 55.
Reši matrično enačbo

$$AX - I = X - B,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naloga 56.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo $AX^{\mathsf{T}} = X^{\mathsf{T}} + I - B^{\mathsf{T}}$.

Naloga 57.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Poiskati želimo tako matriko

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},$$

da bo

$$XA + A^{-1}X = B.$$

Zmnoži in seštej matrike na levi in reši dobljen sistem enačb, da poiščeš matriko X.

Naloga 58.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko X, ki reši matrično enačbo

$$AXA^{\mathsf{T}} = B.$$

Naloga 59.
Matrika X slika tri vektorje iz $\mathbb{R}^3$ v tri vektorje v $\mathbb{R}^2$ na naslednji način:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko X. Ali je matrika X enolično določena?

Naloga 60.
Dane so matrike

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešiti želimo matrično enačbo $AXB = C$ z neznano matriko X.

a. Katera od naštetih matrik naj bo A, katera B in katera C, da bo ta matrična enačba smiselna?
b. Poišči matriko X.

Naloga 61.
Poišči vse rešitve sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ razlika dveh rešitev sistema. Poišči množico vektorjev, ki so pravokotni na vse možne razlike $\vec{r}$.

Naloga 62.
Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 7 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Reši enačbo $XB = A$.

Naloga 63.
Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko X, ki reši enačbo

$$AXB = A + B.$$

Naloga 64.
Rešujemo matrično enačbo

$$AXB = AX + C$$

za dane matrike A, B, C in neznano matriko X.

a. Koliko rešitev ima ta enačba, če sta A in $B - I$ obrnljivi matriki? Kako se v tem primeru izrazi X?
b. Poišči vse rešitve za primer

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \; B = 3I \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \\ 14 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

LU razcep

LU razcep kvadratne matrike A (brez pivotiranja) dobimo, če uspemo A zapisati kot produkt spodnjetrikotne matrike L in zgornjetrikotne matrike U:

$$A = LU$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Tak razcep ne obstaja vedno. Včasih moramo vrstice matrike A pred razcepom premešati s permutacijsko matriko P (matriko, ki ima v vsaki vrstici in vsakem stolpcu natanko eno enico). Dobimo **LU razcep z delnim pivotiranjem**, tj. razcep oblike

$$PA = LU.$$

Računanje LU razcepa

Če LU razcep kvadratne matrike A obstaja, ga dobimo tako, da na A naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah, ki se konča z zgornjetrikotno matriko U. Operacije, ki smo jih pri tem izvedli, zapišemo v matriko L. Če smo za $1 \leq j < i \leq n$ i-ti vrstici **odšteli** l-kratnik j-te vrstice, potem je $l_{ij} = l$.

Naloga 65.

Dane so matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

a. Pokaži, da sta L in U faktorja v LU razcepu matrike A.
b. Naj bo $\vec{b} = [1, 3, 2]^\mathsf{T}$. Poišči rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ s pomočjo LU razcepa.
c. Uporabi LU razcep za izračun inverza A^{-1}.

Naloga 66.

Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči matriko $C = AB$.
b. Poišči LU razcep matrike C brez pivotiranja.

c. Naj bo $\vec{b} = [2, 6, 2]^\mathsf{T}$. Z uporabo LU razcepa iz prejšnje točke reši enačbo $C\vec{x} = \vec{b}$.

POGLAVJE 4

Determinante

Naloge za preverjanje razumevanja

Nekaj lastnosti determinant

a. $\det(I) = 1$,
b. $\det(A^\mathsf{T}) = \det(A)$,
c. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, če je A obrnljiva,
d. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ za $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
e. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Naloga 67.

Za $n \times n$ matrike A, B in C naj velja

$$\det(A) = 2, \quad \det(B) = 0 \quad \text{in} \quad \det(C) = -1.$$

Izračunaj, če obstajajo:

$$\det(A^\mathsf{T}), \quad \det(A^{-1}), \quad \det(2A), \quad \det(AB), \quad \det((AB)^{-1}), \quad \det((AC)^{-1}).$$

Računanje determinante

Determinanto lahko izračunamo tako, da jo postopoma prevedemo v trikotno obliko in upoštevamo, da je **determinanta trikotne matrike** (zgornjetrikotne, spodnjetrikotne ali diagonalne) **enaka produktu števil na diagonali**. Pri tem lahko

- poljubni vrstici prištejemo poljuben večkratnik kake druge vrstice,
- poljubnemu stolpcu prištejemo poljuben večkratnik kakega drugega stolpca.

Če zamenjamo dve vrstici ali dva stolpca, se determinanta pomnoži z -1. Iz vrstice ali stolpca lahko izpostavimo poljuben skalar.
Determinanto lahko računamo tudi z razvojem po vrsticah, z razvojem po stolpcih ali s kombinacijo vseh treh pristopov.
Za 2×2 determinanto velja preprosta formula

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Kolokvijske naloge

Naloga 68.
Poišči vse take matrike $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, za katere velja:

a. X je simetrična,

b. X komutira z matriko $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ in

c. $\det(X) = 4$.

Naloga 69.
Podana je matrika

$$A_n = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a. Izračunaj $\det(A_2)$, $\det(A_3)$ in $\det(A_4)$.
b. Poišči rekurzivno zvezo, ki izraža $\det(A_n)$.
c. S pomočjo matematične indukcije pokaži, da je

$$\det(A_n) = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$$

za vsa naravna števila $n \geq 2$.

Naloga 70.
Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj determinante matrik A, A^T, B, AB, $(AB)^{-1}$, AB^{-1} in $(B - A)^{-1}$.

Naloga 71.
Dani so vektorji

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Naj bo X matrika, za katero velja $X\vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$, $X\vec{b} = \vec{b} - \vec{c}$ in $X\vec{c} = \vec{c} - \vec{a}$.

a. Zapiši matrično enačbo $XG = H$, ki ji zadošča matrika X, tj. izrazi stolpce matrik G in H z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

b. Izračunaj determinanto matrike X, $\det(X)$.
c. Poišči matriko X.

Naloga 72.
Naj bosta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ poljubna pravokotna vektorja iz $\mathbb{R}^n$. Izračunaj

a. $\det(I + \vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}})$,
b. $\det(I - \vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}})$.

Naloga 73.
Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj determinante matrik A, $A - I$, $A^{\mathsf{T}}A$ ter $A^{\mathsf{T}}(A - I)$.

Naloga 74.
Izračunaj determinanti matrik $B^{\mathsf{T}}(B + 2I)$ in $(B + 2I)^{-1}$, če je B matrika

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Naloga 75.
Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poišči determinanto matrike X, ki reši enačbo $AX = B$.

Naloga 76.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t-1 & 1 \\ t-3 & 3 & t \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poišči vsa števila $t \in \mathbb{R}$, za katera je determinanta matrike A enaka 0.

Naloga 77.

Poišči vse vrednosti parametra t, za katere bo determinanta matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & t & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ t & t-1 & 2 \end{bmatrix}$$

enaka 4.

POGLAVJE 5

Vektorski prostori in linearne preslikave

Naloge za preverjanje razumevanja

Vektorski prostor

Množica V z notranjima operacijama seštevanje $(+)$ in množenje s skalarjem $(\cdot)$ je **(realni) vektorski prostor**, če velja:

a. $u + v = v + u$,
b. $u + (v + w) = (u + v) + w$,
c. obstaja natanko en element $0 \in V$, da je $u + 0 = 0 + u = u$,
d. za vsak u obstaja $-u \in V$, da je $u + (-u) = 0$,
e. $1 \cdot u = u$,
f. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$,
g. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$,
h. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,

za vse $u, v, w \in V$ in vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Vektorski podprostor

Naj bo V vektorski prostor in $U \subset V$ podmnožica. Potem je U **vektorski podprostor prostora** V, če velja

a. iz $u_1, u_2 \in U$ sledi, da je $u_1 + u_2 \in U$ (seštevanje je notranja operacija v U), ter
b. iz $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sledi, da je $\alpha u \in U$ (množenje je notranja operacija v U).

Ekvivalentno, podmnožica U je vektorski podprostor, če je zaprta za linearne kombinacije.

Linearna kombinacija

Naj bodo $v_1, \ldots, v_n \in V$ poljubni vektorji in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Izraz oblike

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

imenujemo **linearna kombinacija vektorjev** $v_1, \ldots, v_n$.

Naloga 78.

Za množici

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\} \quad \text{in} \quad V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 1\}$$

ugotovi, ali sta vektorska podprostora v $\mathbb{R}^2$.

Linearna preslikava

Preslikava $f : U \to V$ je **linearna**, če za vse vektorje $\vec{x}, \vec{y} \in U$ in vse skalarje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha f(\vec{x}) + \beta f(\vec{y}).$$

Preslikava je torej linearna, če je slika linearne kombinacije linearna kombinacija slik. Lahko pa tudi ločeno preverjamo, če je preslikava aditivna in homogena. Preslikava $f : U \to V$ je **linearna**, če za vse vektorje $\vec{x}, \vec{y} \in U$ in vse skalarje $\alpha \in \mathbb{R}$ velja

- $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ in
- $f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$.

Naloga 79.

Katera od preslikav $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (x, x - y), \quad g(x, y) = (x^2, y), \quad h(x, y) = (x, 1),$$

je linearna?

Jedro in slika

Za linearno preslikavo $f : U \to V$ lahko definiramo **jedro**

$$\ker(f) = \{\vec{x} \in U \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

in **sliko**

$$\operatorname{im}(f) = \{\vec{y} \in V \mid \exists \vec{x} \in U : f(\vec{x}) = \vec{y}\}.$$

Za dimenzije jedra, slike in domene preslikave f velja zveza

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(U).$$

Kolokvijske naloge

Naloga 80.

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in naj bo U podmnožica vseh vektorjev $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, za katere velja $A\vec{x} = -A^{\mathsf{T}}\vec{x}$.

a. Dokaži, da je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$.
b. Ali sta vektorja $\vec{a} = [1, -1, 1, -1]^{\mathsf{T}}$ in $\vec{b} = [1, 0, 0, -1]^{\mathsf{T}}$ vsebovana v U?
c. Poišči bazo in določi dimenzijo podprostora U.

Naloga 81.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

a. Pokaži, da je $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = B^\mathsf{T}\vec{x}\}$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.
b. Poišči matriko D, za katero bo $V = C(D)$. Ali je D natančno določena?

Naloga 82.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči bazi podprostorov $C(A)$ in $N(A)$.
b. Kateri od vektorjev $\vec{a} = [2, 3, 7, -2]^\mathsf{T}$ in $\vec{b} = [2, 0, -2, 2]^\mathsf{T}$ leži v $C(A)$? Tistega, ki leži v $C(A)$, izrazi kot linearno kombinacijo stolpcev matrike A.

Naloga 83.
Podana sta vektorja $\vec{a} = [2, 1, 2]^\mathsf{T}$ in $\vec{b} = [1, 2, 2]^\mathsf{T}$.

a. Naj bo $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{x}\}$. Ali je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$?
b. Določi matriko A, da bo $U = C(A)$. Kolikšna je dimenzija U? Ali je matrika A enolično določena?

Naloga 84.
Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči bazi za $N(A)$ in $C(A)$. Določi $\dim N(A)$ in $\dim C(A)$.
b. Zapiši množico rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ za vektor $\vec{b} = [5, 0, 4, 0]^\mathsf{T}$.
c. Poišči vektor $\vec{x}$, ki reši sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ in je pravokoten na $\vec{b}$. Koliko je takih vektorjev?

Naloga 85.
Vzemimo $\vec{a} = [1, 1, 0]^\mathsf{T}$. Naj bo V množica vseh vektorjev $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, za katere velja

$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{a}.$$

a. Dokaži, da je V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$. Koliko je $\dim(V)$?
b. Poišči 3×3 matriki A in B, da bo $V = N(A) = C(B)$.

Naloga 86.
Dani so vektorji

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči dimenzijo in bazo linearne ogrinjače V vektorjev $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$.
b. Izrazi vektor $\vec{v}_4$ kot linearno kombinacijo ostalih. Ali je rešitev enolična?

Naloga 87.
Naj bo $\vec{e} = [1,1]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ in naj bo $W \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ podmnožica vseh matrik $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, za katere velja

$$X\vec{e} = X^\mathsf{T}\vec{e}.$$

Definirajmo še matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a. Ali matrika A pripada množici W? Ali matrika B pripada množici W?
b. Preveri, da je W vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
c. Določi dimenzijo W in poišči bazo za W. Izrazi tiste od matrik iz prve točke, ki so vsebovane v W, v tej bazi.

Naloga 88.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ter $\vec{a} = [1,-1]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$. Definiramo množici

$$U = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x}^\mathsf{T} A \vec{x} = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \text{in} \quad V = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \vec{a}^\mathsf{T} X \vec{a} = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

a. Ali je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^2$?
b. Ali je V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$?
c. Za tiste podmnožice, ki so vektorski podprostori, določi dimenzijo in poišči bazo.

Naloga 89.
Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\phi(\vec{x}) = \vec{a}\,\vec{x}^\mathsf{T}\vec{a},$$

pri čemer je $\vec{a} = [1,0,1]^\mathsf{T}$.

a. Poišči matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.
b. Poišči bazi za $\ker(\phi)$ in $\mathrm{im}(\phi)$.

Naloga 90.
Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima predpis

$$\phi(\vec{x}) = \vec{a} \times (\vec{x} + \vec{a}),$$

kjer je $\vec{a} = [1,2,0]^\mathsf{T}$.

a. Preveri, da je ϕ linearna preslikava.
b. Poišči matriko A, ki pripada ϕ glede na standardno bazo $\mathbb{R}^3$.
c. Določi ker ϕ in im ϕ.

Naloga 91.

Za bazo $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$ izberemo vektorje

$$\vec{a} = [2, 1, -1]^\mathsf{T}, \quad \vec{b} = [-1, 0, 1]^\mathsf{T}, \quad \vec{c} = [0, -1, 0]^\mathsf{T}.$$

Linearna preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preslika te vektorje po pravilih

$$\phi(\vec{a}) = \vec{a} - \vec{b}, \quad \phi(\vec{b}) = \vec{b} - \vec{c}, \quad \phi(\vec{c}) = \vec{c} - \vec{a}.$$

a. Zapiši matriko A, ki pripada preslikavi ϕ v bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.
b. Določi inverz P^{-1} prehodne matrike $P = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$.
c. Poišči matriko S, ki pripada preslikavi ϕ v standardni bazi.
d. Določi jedro ker ϕ. Ali je ϕ injektivna?

Naloga 92.

Označimo z V množico vseh 2×2 matrik, za katere je

$$\vec{a}^\mathsf{T} A \vec{a} = 0,$$

pri čemer je $\vec{a} = [1, -1]^\mathsf{T}$. Z $\phi_{\vec{a}}\colon V \to \mathbb{R}^2$ označimo preslikavo, določeno s predpisom

$$A \mapsto A\vec{a}.$$

a. Dokaži, da je V vektorski podprostor v prostoru vseh 2×2 matrik.
b. Določi dimenzijo in bazo podprostora V.
c. Dokaži, da je $\phi_{\vec{a}}$ linearna preslikava.
d. Zapiši matriko preslikave $\phi_{\vec{a}}$ v izbrani bazi in poišči jedro ter sliko.

Naloga 93.

Preslikava na prostoru 2×2 matrik $\phi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ naj bo definirana s predpisom

$$\phi(X) = AX - XA,$$

pri čemer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a. Pokaži, da je ϕ linearna preslikava.
b. Izrazi matriko linearne preslikave ϕ v bazi prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$, dani z matrikami

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c. Določi jedro in sliko linearne preslikave ϕ.

Naloga 94.

Preslikavi $\varphi, \vartheta\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ sta za matriko

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

podani s predpisoma

$$\varphi(X) = [x_{11} + x_{22},\ \det(X)]^{\mathsf{T}},$$
$$\vartheta(X) = [x_{11} + x_{22},\ x_{21} + x_{12}]^{\mathsf{T}}.$$

a. Dokaži, da je ena od obeh preslikav linearna, druga pa ne.
b. Za tisto, ki je linearna, določi matriko, ki ji pripada v standardnih bazah $\mathbb{R}^{2\times 2}$ in $\mathbb{R}^2$.

Naloga 95.

Na vektorskem prostoru matrik $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definiramo preslikavo s predpisom

$$\phi(X) = JX - XJ$$

za dano matriko

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Pokaži, da je $\phi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ linearna preslikava.
b. Zapiši matriko, ki predstavlja ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
c. Določi dimenziji jedra $\ker(\phi)$ in slike $\operatorname{im}(\phi)$.

POGLAVJE 6

Ortogonalnost

Naloge za preverjanje razumevanja

Pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{u}$ izračunamo po formuli

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}.$$

Če je $\vec{u}$ enotski vektor, potem je $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 1$ in je

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{u})\, \vec{u}.$$

Naloga 96.

Naj bosta $\vec{a} = [1, 2, 3]^\mathsf{T}$ in $\vec{u} = [1, 0, 1]^\mathsf{T}$. Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{u}$.

Naloga 97.

Naj bosta $\vec{a} = [1, 2, 3, 4]^\mathsf{T}$ in $\vec{u} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}$. Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{u}$.

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Z **Gram-Schmidtovim postopkom** iz množice $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ linearno neodvisnih vektorjev iz $\mathbb{R}^n$ dobimo množico $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ paroma pravokotnih linearno neodvisnih vektorjev, ki razpenjajo isti podprostor. Izračunamo jih takole:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1, \\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1, \\
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2, \\
&\vdots \\
\vec{u}_n &= \vec{v}_n - \frac{\vec{v}_n \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_n \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 - \cdots - \frac{\vec{v}_n \cdot \vec{u}_{n-1}}{\vec{u}_{n-1} \cdot \vec{u}_{n-1}} \vec{u}_{n-1}.
\end{aligned}$$

Za $i = 1, \ldots, n$ lahko definiramo še vektorje

$$\vec{q}_i = \frac{\vec{u}_i}{\|\vec{u}_i\|}.$$

Potem je $\{\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n\}$ ortonormirana baza za podprostor, ki ga razpenjajo vektorji $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

Razvoj po ONB

Naj bo $\{\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n\}$ ortonormirana baza prostora U in $\vec{u} \in U$. Potem je

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{q}_1)\vec{q}_1 + \ldots + (\vec{u} \cdot \vec{q}_n)\vec{q}_n.$$

Kolokvijske naloge

Naloga 98.

Vektorski podprostor $V \leq \mathbb{R}^4$ je napet na vektorje

$$\vec{v}_1 = [1, 2, 0, 2]^\mathsf{T}, \quad \vec{v}_2 = [2, -1, 2, 0]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{v}_3 = [2, 1, 2, 0]^\mathsf{T}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo za V.
b. Poišči ortonormirano bazo za $V^\perp$.
c. Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja $\vec{x} = [1, 0, 0, 1]^\mathsf{T}$ na V.

Naloga 99.

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo za stolpčni prostor $C(A)$.
b. Poišči ortonormirano bazo za ortogonalni komplement $C(A)^\perp$.
c. Naj bo $\vec{x} = [1, 0, -9, 0]^\mathsf{T}$. Poišči taka vektorja $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^4$, da bo

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2,$$

pri tem pa $\vec{x}_1 \in C(A)$ in $\vec{x}_2 \in C(A)^\perp$. Ali sta takšna vektorja $\vec{x}_1$ in $\vec{x}_2$ enolično določena?

Naloga 100.

Vektorski podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^4$ je linearna ogrinjača vektorjev

$$\vec{v}_1 = [1, 1, -1, -1]^\mathsf{T}, \quad \vec{v}_2 = [2, 1, -1, 0]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{v}_3 = [3, 1, -1, 1]^\mathsf{T}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo za V in določi $\dim V$.
b. Poišči ortonormirano bazo za $V^\perp$.
c. Poišči pravokotni projekciji vektorja $\vec{x} = [0, 1, 0, 1]^\mathsf{T}$ na V in $V^\perp$.

Naloga 101.

Dana sta vektorska podprostora

$$U = \{[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3 \,;\, 2x + y - 3z = 0\} \quad \text{in} \quad V = \{[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3 \,;\, x = 2y = 3z\}.$$

a. Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^3$.
b. Določi bazi za U in V.
c. Dopolni bazo za U do baze prostora $\mathbb{R}^3$.
d. Določi bazo ortogonalnega komplementa prostora V.

Naloga 102.

V $\mathbb{R}^4$ so dani vektorji

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo podprostora U, ki ga napenjajo ti vektorji.
b. V tej ortonormirani bazi zapiši pravokotno projekcijo vektorja $\vec{u} = [1, 2, 3, 4]^\mathsf{T}$ na podprostor U.

Naloga 103.

Naj bosta $\vec{u} = [1, -2, 2]^\mathsf{T}$ in $\vec{v} = [2, 2, 1]^\mathsf{T}$ vektorja v $\mathbb{R}^3$.

a. Zapiši projekcijsko matriko P na podprostor, ki ga napenjata vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$.
b. Izračunaj $P\vec{x}$ za $\vec{x} = [9, 9, 9]^\mathsf{T}$.
c. Izrazi vektor $P\vec{x}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{u}$ in $\vec{v}$.

Naloga 104.

Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$,

$$V = \{[x, y, x + y]^\mathsf{T} : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

a. Poišči bazo prostora V.
b. Poišči ortonormirano bazo prostora V.

c. Določi pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a} = [2, 1, 0]^\mathsf{T}$ na V.

Naloga 105.

Podmnožica $V \subset \mathbb{R}^3$ je podana z naslednjim opisom:

$$V = \{[x, y, z]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}.$$

a. Pokaži, da je V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.
b. Poišči bazo prostora V.
c. Poišči bazo ortogonalnega komplementa $V^\perp$.
d. Zapiši $\vec{a} = [2, 1, 3]^\mathsf{T}$ kot vsoto pravokotnih projekcij na V in $V^\perp$.

Naloga 106.

Za matriko A in vektor $\vec{b}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

poišči pravokotno projekcijo $\vec{b}$ na stolpčni prostor $C(A)$ matrike A.

Naloga 107.

Poišči ortonormirano bazo podprostora V v $\mathbb{R}^5$, ki ga napenjajo vektorji

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Naloga 108.

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo za podprostor $C(A)$.
b. Poišči ortonormirano bazo za podprostor $C(A)^\perp$.

Naloga 109.

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo stolpčnega prostora $C(A)$.

b. Določi pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a} = [5, 3, -2]^\mathsf{T}$ na $C(A)^\perp$.
c. Določi pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na $C(A)$.

Naloga 110.
Poišči ortonormirano bazo stolpčnega prostora $C(A)$ matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

in ortonormirano bazo ničelnega prostora $N(A^\mathsf{T})$ matrike A^T.

Naloga 111.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo za $C(A)$.
b. Poišči ortonormirano bazo za $C(A)^\perp$.
c. Projiciraj vektor $\vec{a} = [5, 2, 4, 0]^\mathsf{T}$ na $C(A)$.

Naloga 112.
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo za stolpčni prostor A, $C(A)$.
b. Poišči ortonormirano bazo za ničelni prostor A^T, $N(A^\mathsf{T})$.
c. Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a} = [4, -1, -1, 4]^\mathsf{T}$ na $C(A)$.

Naloga 113.
Poišči ortonormirano bazo linearne lupine vektorjev

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

nato pa to bazo dopolni do ortonormirane baze celega $\mathbb{R}^3$.

Reševanje predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov

Iščemo neznano funkcijo $f(x) = y$ z neznanimi parametri $a_1, \ldots, a_k$, pri čemer poznamo njene vrednosti $f(x_i) = y_i$ za $i = 1, \ldots, n$ $(k < n)$. Naj bo $\vec{x} = [a_1, \ldots, a_k]^\mathsf{T}$ vektor neznanih parametrov. Če namesto predoločenega sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ rešimo kvadratni sistem $A^\mathsf{T}A\vec{x} = A^\mathsf{T}\vec{b}$, je dobljena rešitev približek prave rešitve po metodi najmanjših kvadratov.

Naloga 114.

Iščemo funkcijo oblike

$$f(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x},$$

ki bo aproksimirala naslednje podatke:

x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y_i	-4	-1	5	2

.

a. Iz $f(x_i) = y_i$ dobimo predoločen sistem linearnih enačb za c_1 in c_2. Zapiši matriko in desno stran tega sistema.
b. Določi parametra c_1 in c_2 po linearni metodi najmanjših kvadratov tako, da bo f predstavljala najboljšo aproksimacijo za zgornje podatke.

Naloga 115.

Metka vozi avtomobil s konstantno hitrostjo, njen sovoznik Janko pa si po vsaki uri vožnje zapiše stanje števca kilometrov. Dobi naslednjo tabelo:

t	1	2	3	4
s	150	220	330	420

.

a. Za hitrost avtomobila v in prevoženo pot $s(t)$ velja zveza $s(t) = vt + s_0$. S pomočjo podatkov iz zgornje tabele zapiši sistem enačb v obliki

$$A \begin{bmatrix} v \\ s_0 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

in poišči rešitev dobljenega sistema z linearno metodo najmanjših kvadratov.
b. S kakšno hitrostjo Metka vozi avtomobil? Koliko kilometrov je bilo na števcu pred začetkom vožnje?
c. Oceni stanje na števcu kilometrov po peti uri vožnje.

Naloga 116.

Poišči tisti vektor $\vec{x}$, ki je po metodi najmanjših kvadratov najboljši približek za rešitev sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Naloga 117.

Vrednost funkcije f je podana v štirih točkah:

$$f(3) = 7, \quad f(1) = -1, \quad f(-1) = 8 \quad \text{in} \quad f(-3) = 16.$$

Z metodo najmanjših kvadratov poišči enačbo kvadratne funkcije $g(x) = ax^2 + bx + c$, ki se najbolj prilega funkciji f v omenjenih štirih točkah.

Naloga 118.

Podatke v tabeli

x_i	0	1	2	3
y_i	-5	-2	4	3

bi radi aproksimirali s funkcijo oblike

$$f(x) = ax + b.$$

Določi konstanti a in b tako, da bo $f(x_i)$ najboljša aproksimacija za y_i po metodi najmanjših kvadratov.

Naloga 119.

Podatke (x, y) iz tabele

x	-2	-1	1	2
y	-4	1	2	-1

želimo aproksimirati s funkcijo oblike $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$.

a. Zapiši predoločen sistem enačb za parametra a in b.
b. Določi parametra a in b po linearni metodi najmanjših kvadratov, da bo f predstavljala najboljšo aproksimacijo za zgornje podatke.

POGLAVJE 7

Lastne vrednosti

Naloge za preverjanje razumevanja

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Naj bo A kvadratna matrika. Vektor $\vec{x} \neq 0$ je **lastni vektor** za **lastno vrednost** λ, če velja

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Naloga 120.

Preveri, ali sta $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ lastna vektorja matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Računanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev

Lastne vrednosti so rešitve enačbe

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Lastne vektorje pri lastni vrednosti λ dobimo tako, da določimo ničelni podprostor matrike $A - \lambda I$.

Naloga 121.

Preveri, ali sta $\alpha = 2$ in $\beta = 3$ lastni vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Naloga 122.

Določi lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\alpha = 2$ matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizacija matrike

Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$. Naj bo $P = [\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \ldots\ \vec{x}_n]$ matrika, v katero smo po stolpcih zložili lastne vektorje in naj bo

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

matrika, ki ima po diagonali pripadajoče lastne vrednosti. Potem je $A = PDP^{-1}$. Pravimo, da je matrika A **diagonalizabilna**. Če ima matrika A manj kot n linearno neodvisnih lastnih vektorjev, potem je ne moremo diagonalizirati.

Nekaj dejstev

a. Lastne vrednosti zgornjetrikotne matrike so enake njenim diagonalnim elementom.
b. Sled matrike (vsota njenih diagonalnih elementov) je enaka vsoti lastnih vrednosti (štetih z večkratnostjo).
c. Determinanta matrike je enaka produktu lastnih vrednosti (štetih z večkratnostjo).
d. Če je $A = PDP^{-1}$, potem je $A^k = PD^kP^{-1}$ za vse $k \in \mathbb{N}$.
e. Vse lastne vrednosti simetrične matrike so realne. Lastni vektorji realne simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so med seboj pravokotni.
f. Vsako realno simetrično matriko A lahko zapišemo kot $A = QDQ^\mathsf{T}$, kjer je Q ortogonalna matrika lastnih vektorjev, D pa diagonalna matrika, ki ima na diagonali pripadajoče lastne vrednosti matrike A.

Kolokvijske naloge

Naloga 123. 

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Poišči prehodno matriko P in diagonalno matriko D, da bo veljalo $A = PDP^{-1}$. Nato izračunaj A^{2020}. Ali lahko (v tem primeru) to storiš, ne da bi izračunal P^{-1}?

Naloga 124.
Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

a. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.
b. Ali je A diagonalizabilna? Če je, poišči matriki P in D, da bo $A = PDP^{-1}$, sicer pa povej, zakaj ne.

Naloga 125.
Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

a. Pokaži, da je $\lambda_1 = -2$ lastna vrednost matrike A in poišči pripadajoči lastni vektor $\vec{v}_1$.
b. Pokaži, da je $\vec{v}_2 = [0, 1, 0]^\mathsf{T}$ lastni vektor matrike A in določi pripadajočo lastno vrednost λ_2.
c. Poišči še tretjo lastno vrednost ter določi njeno algebraično in geometrično večkratnost.

Naloga 126.
Dana sta vektorja $\vec{u} = [1, 0, 0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v} = [0, 1, -1]^\mathsf{T}$. Naj bosta A in B matriki

$$A = [\vec{u}\ \vec{v}] \quad \text{in} \quad B = AA^\mathsf{T}.$$

Diagonaliziraj matriko B in izračunaj B^{10}. Pri tem matrike B ni treba eksplicitno izračunati, da jo diagonaliziraš. Pomagaj si z dejstvom, da sta vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ pravokotna.

Naloga 127.
Podana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči lastne vrednosti matrike A.
b. Če je mogoče, matriko A diagonaliziraj.

Naloga 128.
Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči bazo ničelnega prostora $N(A)$.
b. Poišči bazo stolpčnega prostora $C(A)$.

c. Kateremu lastnemu podprostoru A je enak $N(A)$? Kateri lastni vektorji A so vsebovani v $C(A)$?
d. Poišči najprej lastne vektorje in nato še pripadajoče lastne vrednosti A.

Naloga 129.

Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči ortonormirano bazo ničelnega prostora $N(A)$.
b. Poišči ortonormirano bazo stolpčnega prostora $C(A)$.
c. Izračunaj A^2. Kaj ti A^2 pove o lastnih vektorjih in pripadajočih lastnih vrednostih matrike A?
d. Poišči ortonormirano bazo $\mathbb{R}^4$, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A, in zapiši A kot produkt $A = QDQ^{\mathsf{T}}$.

Naloga 130.

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči lastne vrednosti ter pripadajoče lastne vektorje matrike A. Ali lahko matriko A diagonaliziramo?
b. Ali obstaja neničeln vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, da je $A\vec{x}$ vsaj dvakrat daljši vektor, tj. $\|A\vec{x}\| \geq 2\|\vec{x}\|$? Če tak $\vec{x}$ obstaja, ga poišči!

Naloga 131.

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.
b. Poišči diagonalno matriko D in obrnljivo matriko P, da bo $A = PDP^{-1}$.
c. Poišči diagonalno matriko D in ortogonalno matriko Q, da bo $A = QDQ^{\mathsf{T}}$.

Naloga 132.

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Diagonaliziraj A in izračunaj $p(A)$, kjer je $p(x) = x^{2018} - x^2 + 2x$.

Naloga 133.
Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Ali obstaja taka matrika P, da bo $A = PDP^{-1}$?

Naloga 134.
Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.
b. Je matrika A podobna diagonalni matriki? Če je, zapiši pripadajočo diagonalno matriko D in prehodno matriko P.

Naloga 135.
Dana sta matrika A in vektor $\vec{v}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

a. Preveri, da je $\vec{v}$ lastni vektor matrike A. Kaj je pripadajoča lastna vrednost?
b. Izračunaj $(A^3 + A^2 + A)\vec{v}$.
c. Poišči vse lastne vrednosti matrike A.
d. Ugotovi, ali je A podobna diagonalni matriki, ali pa razloži, zakaj ni.

Naloga 136.
Zrcaljenje je matrika, za katero je $Z^2 = I$.

a. Kakšne lastne vrednosti lahko ima matrika zrcaljenja Z?
b. V $\mathbb{R}^2$ naj bo z_1 zrcaljenje čez simetralo lihih kvadrantov in z_2 zrcaljenje čez y-os. Zapiši pripadajoči matriki Z_1 in Z_2.
c. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrik Z_1 in Z_2.
d. Zapiši matriki R_{12} in R_{21}, ki pripadata preslikavama $z_1 \circ z_2$ in $z_2 \circ z_1$.
e. Opiši preslikavi R_{12} in R_{21}.
f. Poišči lastne vrednosti matrik R_{12} in R_{21} in rezultat geometrijsko interpretiraj.

Naloga 137.
V $\mathbb{R}^3$ naj bo r_1 rotacija okrog x-osi za $\frac{\pi}{2}$ in r_2 rotacija okrog z-osi za $\frac{\pi}{2}$.

a. Zapiši matriki R_1 in R_2, ki pripadata linearnima preslikavama r_1 in r_2.
b. Zapiši matriki R_{12} in R_{21}, ki pripadata preslikavama $r_1 \circ r_2$ in $r_2 \circ r_1$.

c. Kompozitum rotacij okoli premic skozi izhodišče je spet rotacija okoli premice skozi izhodišče. Za R_{12} in R_{21} določi osi rotacij.
d. Kako bi za R_{12} in R_{21} določili kota rotacij?

Naloga 138.
V $\mathbb{R}^3$ naj bo r_1 rotacija okrog x-osi za $\frac{\pi}{4}$ in r_2 rotacija okrog z-osi za $-\frac{\pi}{4}$.

a. Zapiši matriki R_1 in R_2, ki pripadata linearnima preslikavama r_1 in r_2.
b. Zapiši matriki R_{12} in R_{21}, ki pripadata preslikavama $r_1 \circ r_2$ in $r_2 \circ r_1$.
c. Kompozitum rotacij okoli premic skozi izhodišče je spet rotacija okoli premice skozi izhodišče. Za R_{12} in R_{21} določi osi rotacij.
d. Kako bi za R_{12} in R_{21} določili kota rotacij?

Rekurzivna zaporedja s pomočjo razvoja po bazi iz lastnih vektorjev

Naj bo zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ številsko zaporedje in $\vec{x}_n = [a_{n+1}, a_n]^\mathsf{T}$ zaporedje vektorjev, ki za vsak n zadošča zvezi

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$$

za neko matriko $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Denimo, da sta $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ lastna vektorja matrike A pri lastnih vrednostih λ_1 in λ_2. Izrazimo $\vec{x}_0$ kot linearno kombinacijo lastnih vektorjev:

$$\vec{x}_0 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2.$$

Potem je

$$\vec{x}_n = A^n\vec{x}_0 = A^n(\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2) = \alpha A^n(\vec{v}_1) + \beta A^n(\vec{v}_2) = \alpha(\lambda_1)^n\vec{v}_1 + \beta(\lambda_2)^n\vec{v}_2.$$

Iz zgornje enakosti lahko iz ustrezne komponente vektorja x_n razberemo a_n.

Naloga 139.
Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je dano z rekurzivno zvezo

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$$

in začetnima členoma $a_0 = 3$ ter $a_1 = 7$. S spodnjimi koraki določi eksplicitno formulo za a_n.

a. Poišči tako matriko A, da lahko zgornjo rekurzivno zvezo zapišeš v obliki

$$\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1}$$

za vektor $\vec{x}_n = [a_n, a_{n-1}]^\mathsf{T}$.
b. Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.
c. Poišči eksplicitno formulo za a_n.

Naloga 140.
Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano rekurzivno z enačbo

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

ter z začetnima členoma $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$. Določi splošni člen zaporedja a_n.

Naloga 141.
Zaporedji $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sta dani z rekurzivnima zvezama

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} - 2b_{n-1}, \\ b_n &= 2a_{n-1} - 2b_{n-1}, \end{aligned}$$

in začetnima členoma $a_0 = 3$ ter $b_0 = 3$. Poišči eksplicitni formuli za zaporedji a_n in b_n.

Naloga 142.
Zaporedji $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sta podani rekurzivno z začetnima členoma $a_0 = 4$ in $b_0 = 3$ ter enačbama

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 6b_{n-1}, \\ b_n &= 3a_{n-1} - 5b_{n-1}. \end{aligned}$$

a. Izračunaj člena a_2 in b_2.
b. Poišči eksplicitno formulo za zaporedje a_n.

Naloga 143.
Dan je sistem linearnih rekurzivnih enačb

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n &= a_{n-1} - b_{n-1}, \end{aligned}$$

z začetnima vrednostima $a_0 = 1$ in $b_0 = 2$.

a. Izračunaj a_3 in b_3.
b. Zapiši zgornji sistem v obliki $\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1}$, kjer je $\vec{x}_n = [a_n, b_n]^\mathsf{T}$.
c. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike iz prejšnje točke.
d. Zapiši formuli za a_n in b_n in izračunaj a_{2018}.

Naloga 144.
Poišči splošno rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y, \\ \dot{y} &= x + 3y, \end{aligned}$$

ter tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $x(0) = 3$ in $y(0) = -2$.

Rešitve

1. Vektorji in geometrija

Rešitev naloge 1. ⇧

a. Ker je
$$\vec{a} = [3, 6, 9]^\mathsf{T} = 3[1, 2, 3]^\mathsf{T} = 3\vec{b},$$
sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna.

b. Če enakost $\vec{a} = \alpha\vec{b}$ zapišemo po komponentah, vidimo, da bi moralo veljati $1 = 2\alpha$, $0 = -4\alpha$, $-2 = 0$ in $1 = 3\alpha$. Ker število $\alpha \in \mathbb{R}$, ki bi zadoščalo vsem štirim pogojem, ne obstaja, vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nista kolinearna.

c. Opazimo, da je $-\frac{5}{3} \cdot (-6) = 10$ in $\frac{3}{2} \cdot (-6) = -9$, torej je
$$\vec{b} = [10, -9]^\mathsf{T} = -6\left[-\tfrac{5}{3}, \tfrac{3}{2}\right]^\mathsf{T} = -6\vec{a},$$
zato sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna.

d. V tem primeru je $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a}$, zato sta vektorja kolinearna.

Rešitev naloge 2. ⇧

Iskane dolžine so
$$\begin{aligned}
\|\vec{a}\| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5,\\
\|\vec{b}\| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3,\\
\|\vec{c}\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 0 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 3. ⇧

Dobimo
$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = -1 + 6 = 5,\\
\vec{b} \times \vec{c} &= [4 - 3, -(-4 - (-9)), -1 - (-3)]^\mathsf{T} = [1, -5, 2]^\mathsf{T},\\
(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [-2, -5, 1]^\mathsf{T} \cdot \vec{c} = 6 - 5 + 4 = 5,\\
(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) &= (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = [-1, 5, -2]^\mathsf{T} \cdot \vec{a} = -1 - 4 = -5.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 4. ⇧

a. Ker je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0$, sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna.

b. Iz enakosti

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \|\vec{c}\|\|\vec{d}\| \cos\varphi$$

dobimo

$$1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 = \sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 0^2} \cos\varphi$$

oziroma

$$2 = 2\sqrt{2} \cos\varphi,$$

od koder izrazimo $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Od tu izračunamo iskani kot, $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Seveda pa bi lahko vektorjema $\vec{c}$ in $\vec{d}$ dodali ničelno tretjo komponento in uporabili drugo formulo. Ker je $[1,-1,0]^\mathsf{T} \times [2,0,0]^\mathsf{T} = [0,0,2]^\mathsf{T}$, je po formuli z vektorskim produktom

$$2 = 2\sqrt{2} \sin\varphi$$

oziroma $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dobimo $\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

c. Najprej izračunamo $\|\vec{e}\| = \sqrt{6}$ in $\|\vec{f}\| = \sqrt{6}$. Če uporabimo formulo s skalarnim produktom, dobimo

$$2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = \sqrt{6}\sqrt{6} \cos\varphi$$

oziroma

$$3 = 6 \cos\varphi.$$

Od tu izrazimo $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. Iskani kot je torej $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. Ker smo v $\mathbb{R}^3$, bi lahko uporabili tudi formulo z vektorskim produktom. Ker je

$$\vec{e} \times \vec{f} = [-3,-3,3]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \|\vec{e} \times \vec{f}\| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3},$$

bi v tem primeru dobili

$$3\sqrt{3} = \sqrt{6}\sqrt{6} \sin\varphi.$$

Od tu lahko hitro izrazimo $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dobimo $\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Rešitev naloge 5.

Parametrična enačba premice p je

$$p\colon [2,2,-3]^\mathsf{T} + t[5,2,-6]^\mathsf{T}.$$

Kanonična enačba premice p je

$$p\colon \frac{x-2}{5} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-6}.$$

Rešitev naloge 6.

Smerna vektorja sta $\vec{p} = [2,-3,1]^\mathsf{T}$ in $\vec{q} = [2,-3,2]^\mathsf{T}$. Ena od točk na premici p je $A(-1,1,-1)$, ena od točk na premici q pa $B(1,0,-4)$. Če želimo dobiti kakšno drugo točko na premici p (oziroma q), pa moramo krajevnemu vektorju točke A (oziroma B) prišteti poljuben večkratnik vektorja $\vec{p}$ (oziroma $\vec{q}$).

Rešitev naloge 7.

Ker je $\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = 5 - 6 = -1$, je iskana enačba ravnine

$$x - 2y + 3z = -1.$$

Rešitev naloge 8.

Iz enačb preberemo normali

$$\vec{n}_\Sigma = [2, 3, -1]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{n}_\Lambda = [1, 0, -3]^\mathsf{T}.$$

V drugem delu naloge iščemo točke, katerih koordinate zadoščajo enačbi ene ali druge ravnine. Ni težko uganiti, da enačbi ravnine Σ zadoščajo na primer točke $A_1(-1, 1, 0)$, $A_2(1, 0, 1)$ ali pa $A_3(0, 1, 2)$. Enačbi ravnine Λ pa zadoščajo na primer točke $B_1(2, 0, -1)$, $B_2(5, 0, 0)$ ali $B_3(11, 0, 2)$. Seveda je možnih rešitev v obeh primerih še veliko več.

Rešitev naloge 9.

Premica p ima smerni vektor $\vec{p} = [4, 2, -4]^\mathsf{T}$ in vsebuje točko $A(2, -1, 2)$, ravnina Σ pa ima normalo $\vec{n} = [2, 2, -1]^\mathsf{T}$ in vsebuje točko $B(2, 0, 0)$. Posebej izračunajmo

$$\begin{aligned} \vec{r}_P - \vec{r}_A &= [1, 2, -1]^\mathsf{T}, \\ \vec{p} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_A) &= [4, 2, -4]^\mathsf{T} \times [1, 2, -1]^\mathsf{T} = [6, 0, 6]^\mathsf{T}, \\ \|\vec{p}\| &= \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6, \end{aligned}$$

nato pa še

$$\begin{aligned} \vec{r}_P - \vec{r}_B &= [1, 1, 1]^\mathsf{T}, \\ \vec{n} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_B) &= [2, 2, -1]^\mathsf{T} \cdot [1, 1, 1]^\mathsf{T} = 2 + 2 - 1 = 3, \\ \|\vec{n}\| &= \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Tako je

$$d(P, p) = \frac{\|\vec{p} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_A)\|}{\|\vec{p}\|} = \frac{\|[6, 0, 6]^\mathsf{T}\|}{6} = \frac{\sqrt{2 \cdot 36}}{6} = \sqrt{2}$$

in

$$d(P, \Sigma) = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_B)|}{\|\vec{n}\|} = \frac{3}{3} = 1.$$

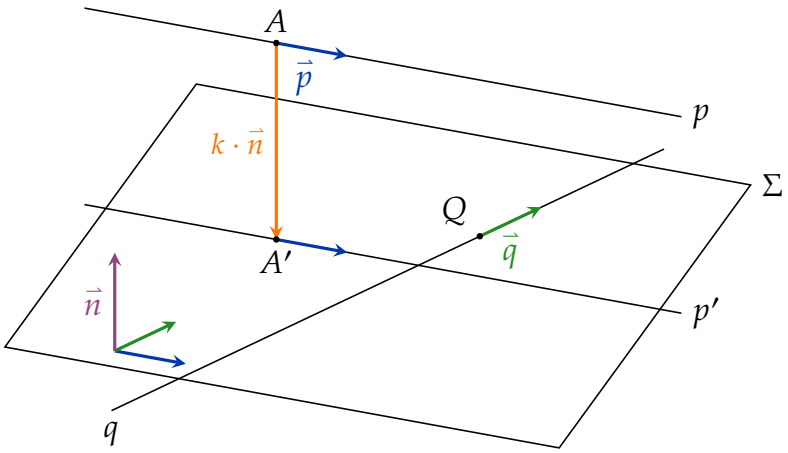
Rešitev naloge 10.

a. Normala na ravnino Σ mora biti pravokotna na premico p (da bo p vzporedna ravnini) in na premico q (ker q leži v ravnini). Ker sta smerna vektorja premic p in q neničelna in linearno neodvisna, lahko normalo ravnine Σ izračunamo kot vektorski produkt smernih vektorjev $\vec{p} = [1, 2, 1]^\mathsf{T}$ in $\vec{q} = [-2, -3, 1]^\mathsf{T}$,

$$\vec{n} = \vec{n}_\Sigma = \vec{p} \times \vec{q} = [5, -3, 1]^\mathsf{T}.$$

Seveda bi lahko za normalo ravnine vzeli tudi katerikoli neničelni večkratnik vektorja $\vec{n}$. Za točko na ravnini lahko vzamemo katerokoli točko na premici q, na primer $Q(0, 1, -1)$. Tako dobimo enačbo za Σ:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r}_Q \quad \text{oziroma} \quad 5x - 3y + z = -4.$$



Slika 1. Skica k nalogi 10.

b. Ta del lahko rešimo na več načinov. Lahko se iz točke A premaknemo za k-kratnik normale, in poračunamo k tako, da bo dobljena točka ležala na ravnini. Iz

$$\begin{aligned}\vec{r}_{A'} &= \vec{r}_A - k\vec{n} = \\ &= [7,1,-1]^\mathsf{T} - k[5,-3,1]^\mathsf{T} = \\ &= [7-5k, 1+3k, -1-k]^\mathsf{T} \in \Sigma\end{aligned}$$

in enačbe ravnine Σ dobimo enačbo

$$5(7-5k) - 3(1+3k) - 1 - k = -4,$$

ki ima rešitev $k = 1$. Torej je $A'(2,4,-2)$.
Če slučajno že poznamo formulo za pravokotno projekcijo enega vektorja na drugega, imamo še en možen pristop. Poiščemo vektor med katerokoli točko na ravnini, recimo $Q(0,1,-1)$, in $A(7,1,-1)$. Označimo ga z $\vec{a}$ in izračunamo

$$\vec{a} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = [7,0,0]^\mathsf{T}$$

Projekcijo vektorja $\vec{a}$ na $\vec{n}$ označimo z $\vec{b}$ in jo izračunamo po formuli

$$\vec{b} = \frac{\vec{n}\cdot\vec{a}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\,\vec{n} = \frac{35}{35}\vec{n} = \vec{n}.$$

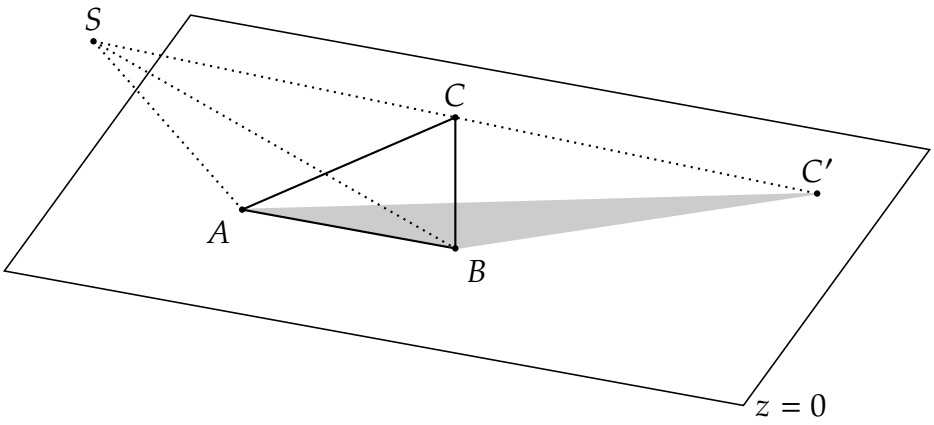
Če od krajevnega vektorja $\vec{r}_A$ odštejemo projekcijo $\vec{b}$ pristanemo ravno na ravnini Σ. Projekcija točke A na ravnino Σ je torej $A'(2,4,-2)$.

c. Smerni vektor projicirane premice p' že poznamo, saj je enak $\vec{p}$. Potrebujemo še eno točko na premici p'. Dovolj je projicirati katerokoli točko s premice p na ravnino Σ. Če opazimo, da točka A iz prejšnjega dela naloge leži na premici, lahko uporabimo kar že izračunano točko A'. Tako lahko takoj zapišemo parametrično obliko iskane premice:

$$p' \colon [2,4,-2]^\mathsf{T} + t[1,2,1]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 11.

a. Na ravnini z enačbo $z = 0$ ležijo tiste točke, ki imajo tretjo komponento enako 0. To sta torej točki A in B.



Slika 2. Skica k nalogi 11.

b. Ker A in B že ležita na ravnini, je $A' = A$ in $B' = B$. Izračunajmo enačbo premice p skozi S in C. Smerni vektor bo $\vec{p} = \overrightarrow{SC} = [-3, 4, -2]^\mathsf{T}$. Za točko na premici lahko vzamemo C in dobimo enačbo premice

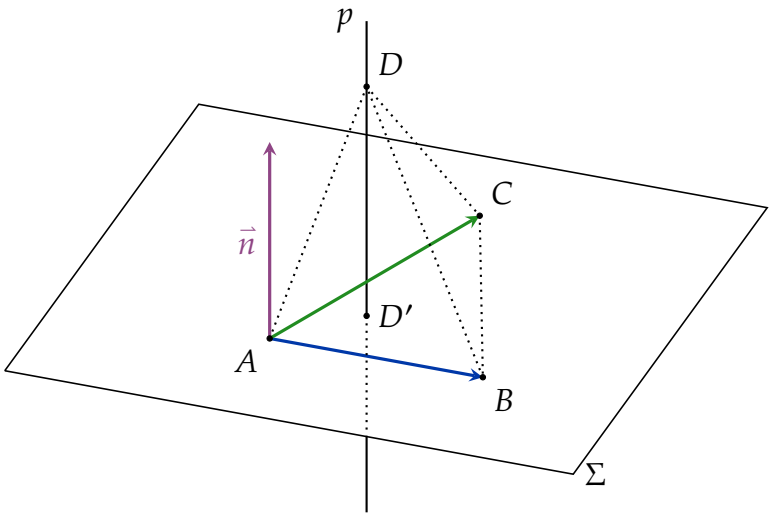
$$p\colon [0, 3, 2]^\mathsf{T} + t[-3, 4, -2]^\mathsf{T}.$$

Vsaka točka na premici p je torej oblike $[-3t, 3 + 4t, 2 - 2t]^\mathsf{T}$. Če želimo, da bo tretja komponenta enaka 0, mora biti $t = 1$ in dobimo $C'(-3, 7, 0)$.

c. Ploščino trikotnika $A'B'C'$ najlažje izračunamo po formuli

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\| = \tfrac{1}{2}\|[0, 3, 0]^\mathsf{T} \times [-3, 7, 0]^\mathsf{T}\| = \\ &= \tfrac{1}{2}\|[0, 0, 9]^\mathsf{T}\| = \tfrac{9}{2}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 12. ⇧



Slika 3. Skica k nalogi 12.

a. Ravnina Σ bo vsebovala vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$, zato lahko za njeno normalo vzamemo njun vektorski produkt:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [2,1,0]^\mathsf{T} \times [0,2,1]^\mathsf{T} = [1,-2,4]^\mathsf{T}.$$

Za točko na ravnini izberemo $A(0,0,0)$ in dobimo enačbo ravnine

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r}_A \quad \text{oziroma} \quad x - 2y + 4z = 0.$$

b. Ker mora biti premica p pravokotna na ravnino, lahko za smerni vektor vzamemo kar normalo ravnine. Enačba premice p je torej

$$p\colon [3,1,5]^\mathsf{T} + t[1,-2,4]^\mathsf{T}.$$

c. Točke na premici p imajo koordinate $[3+t, 1-2t, 5+4t]^\mathsf{T}$. Ko to vstavimo v enačbo ravnine Σ, dobimo

$$3 + t - 2(1-2t) + 4(5+4t) = 0,$$

od koder izračunamo $t = -1$. To vstavimo v enačbo premice in dobimo točko $D'(2,3,1)$.

d. Prostornino tetraedra dobimo po formuli

$$V = \tfrac{1}{3} \mathrm{S}_{ABC} h,$$

kjer je S_{ABC} ploščina osnovne ploskve, h pa višina. Prvo izračunamo s pomočjo vektorskega produkta:

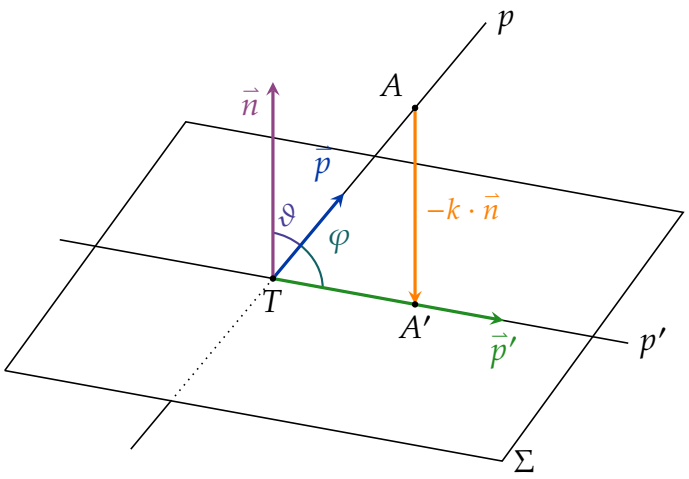
$$\mathrm{S}_{ABC} = \tfrac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \tfrac{1}{2} \|\vec{n}\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{21}.$$

Višina iz D na ploskev ABC je DD', zato je

$$h = \|\overrightarrow{DD'}\| = \|[-1,2,-4]^\mathsf{T}\| = \sqrt{21}.$$

Torej je $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{21} \cdot \sqrt{21} = \frac{7}{2}$.

Rešitev naloge 13. ⇧



Slika 4. Skica k nalogi 13.

a. Najprej izračunamo kot ϑ med smernim vektorjem premice p, $\vec{p} = [0,1,1]^\mathsf{T}$, in normalo ravnine $\vec{n} = [2,1,2]^\mathsf{T}$. Uporabimo formulo za skalarni produkt:

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{p} &= \|\vec{n}\|\|\vec{p}\|\cos\vartheta, \\ 2\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 1 &= \sqrt{2^2+1^2+2^2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}\cos\vartheta, \\ 3 &= \sqrt{9}\sqrt{2}\cos\vartheta, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \cos\vartheta, \end{aligned}$$

oziroma $\cos\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Od tod dobimo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$. Kot φ med premico in ravnino je tako enak $\varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

b. Točke na premici p imajo obliko

$$[3,0,0]^\mathsf{T} + t[0,1,1]^\mathsf{T} = [3,t,t]^\mathsf{T}.$$

To vstavimo v enačbo ravnine Σ in dobimo enačbo za t,

$$2\cdot 3 + t + 2t = 9,$$

z rešitvijo $t = 1$. Ko to vstavimo nazaj v enačbo premice, dobimo presečišče $T(3,1,1)$.

c. Pravokotna projekcija p' bo vsebovala točko T. Določiti moramo še smerni vektor, ki ga dobimo kot razliko krajevnih vektorjev dveh točk na p'. Drugo točko dobimo tako, da poljubno od T različno točko s premice p projiciramo na ravnino Σ. Izberimo kar točko $A(3,0,0)$. Ko se premaknemo za večkratnik normale iz točke A, dobimo točko $[3-2k,-k,-2k]^\mathsf{T}$. To vstavimo v enačbo ravnine in dobimo

$$2(3-2k) - k + 2(-2k) = 9.$$

Rešitev je $k = -\frac{1}{3}$ in projekcija A na ravnino je $A'(\frac{11}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Smerni vektor premice p' bo vzporeden vektorju $\overrightarrow{TA'} = [\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}]^\mathsf{T}$, recimo $\vec{p}' = [2,-2,-1]^\mathsf{T}$. Iskana enačba je torej

$$p'\colon [3,1,1]^\mathsf{T} + t[2,-2,-1]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 14.

a. Izračunamo enačbo ravnine Σ, ki jo določajo točke A, B in C in preverimo, če točka D leži na tej ravnini. Normalni vektor ravnine Σ bo vzporeden vektorju

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = [3,-3,6]^\mathsf{T}\times[-6,-3,3]^\mathsf{T} = [9,-45,-27]^\mathsf{T}.$$

Izberemo si $\vec{n} = [1,-5,-3]^\mathsf{T}$. Izračunamo še

$$x - 5y - 3z \;=\; \vec{n}\cdot\vec{r}_A \;=\; [1,-5,-3]^\mathsf{T}\cdot[3,6,3]^\mathsf{T} \;=\; -36.$$

Torej je $\Sigma\colon x-5y-3z = -36$. Če vstavimo koordinate točke D, vidimo, da enačba ni izpolnjena. Točka D torej ne leži na Σ, to pa pomeni, da točke A, B, C in D ne ležijo na isti ravnini.

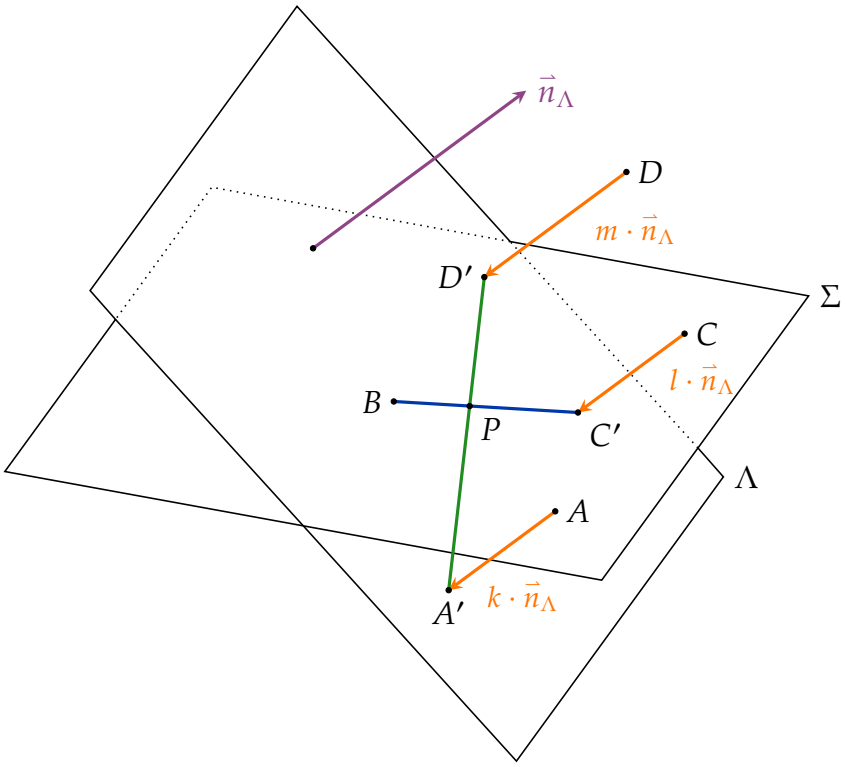
b. Izračunajmo projekcijo A' točke A na ravnino $\Lambda\colon x+y-z = 0$. Iz A se premaknemo za nek večkratnik normale v točko $[3+k,6+k,3-k]^\mathsf{T}$. Ta točka mora ležati na ravnini, zato je

$$3 + k + 6 + k - (3-k) = 0,$$

od koder dobimo $k = -2$ in $A'(1,4,5)$. Podobno izračunamo še

$$B'(6,3,9),\quad C'(-1,5,4)\quad\text{in}\quad D'(-2,7,5).$$

Opazimo, da točka B že leži na ravnini Λ, zato je $B = B'$.



Slika 5. Skica k nalogi 14.

c. Točke na daljici $A'D'$ imajo smerni vektor

$$\vec{r}_{A'} + t\overrightarrow{A'D'} = [1,4,5]^\mathsf{T} + t[-3,3,0]^\mathsf{T} = [1-3t, 4+3t, 5]^\mathsf{T}$$

za nek t, $0 \leq t \leq 1$. Točke na daljici $B'C'$ imajo smerni vektor

$$\vec{r}_{B'} + s\overrightarrow{B'C'} = [6,3,9]^\mathsf{T} + s[-7,2,-5]^\mathsf{T} = [6-7s, 3+2s, 9-5s]^\mathsf{T}$$

za nek s, $0 \leq s \leq 1$. Morebitno presečišče bo ležalo na obeh daljicah, zato bo veljalo

$$[1-3t, 4+3t, 5]^\mathsf{T} = [6-7s, 3+2s, 9-5s]^\mathsf{T}$$

oziroma po komponentah

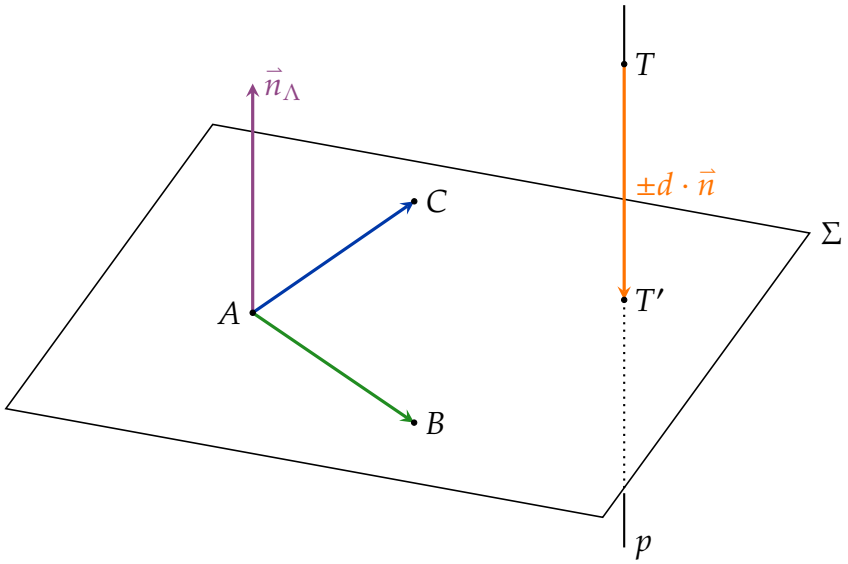
$$\begin{aligned} 1-3t &= 6-7s, \\ 4+3t &= 3+2s, \\ 5 &= 9-5s. \end{aligned}$$

Dobili smo sistem treh enačb z dvema neznankama. Če je sistem enolično rešljiv in ležita t in s med 0 in 1, potem se daljici sekata. Če je sistem enolično rešljiv, ampak je vsaj eden od parametrov večji od 1 ali manjši od 0, potem se sekata premici, daljici pa ne. Če sistem ne bi imel rešitev, bi v splošnem to pomenilo, da sta premici mimobežni, vendar se to v tem primeru ne sme zgoditi, ker vemo, da ležita v isti ravnini, vzporedni pa tudi nista, saj imata različna smerna vektorja. Iz tretje enačbe lahko takoj izračunamo $s = \frac{4}{5}$. To vstavimo v drugo enačbo in dobimo še $t = \frac{1}{5}$. Če oboje vstavimo v prvo enačbo, vidimo, da je res izpolnjena. Presečišče P obeh daljic dobimo tako, da enega od parametrov vstavimo v

parametrizacijo daljice:

$$[1-3t, 4+3t, 5]^\mathsf{T} \;=\; \left[1-\tfrac{3}{5}, 4+\tfrac{3}{5}, 5\right]^\mathsf{T} \;=\; \left[\tfrac{2}{5}, \tfrac{23}{5}, 5\right]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 15. ⇧



Slika 6. Skica k nalogi 15.

a. Normalni vektor ravnine bo vzporeden vektorju

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \;=\; [-2,0,-1]^\mathsf{T} \times [0,2,1]^\mathsf{T} \;=\; [2,2,-4]^\mathsf{T}.$$

Izberimo $\vec{n} = [1,1,-2]^\mathsf{T}$. Za točko na ravnini uporabimo točko A. Ker je $\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 3$, je enačba ravnine

$$\Sigma\colon\ x + y - 2z = 3.$$

b. Smerni vektor premice, pravokotne na Σ, bo enak $\vec{n}$, zato se enačba te premice glasi

$$p\colon\ [1,2,3]^\mathsf{T} + t[1,1,-2]^\mathsf{T}.$$

c. Razdalja d med točko T in ravnino Σ je razdalja med T in pravokotno projekcijo T' točke T na Σ. Ker je premica p pravokotna na Σ in vsebuje T, bo T' presečišče p in Σ. Točke na p imajo koordinate $[1+t, 2+t, 3-2t]^\mathsf{T}$, in ko to vstavimo v enačbo za Σ, dobimo

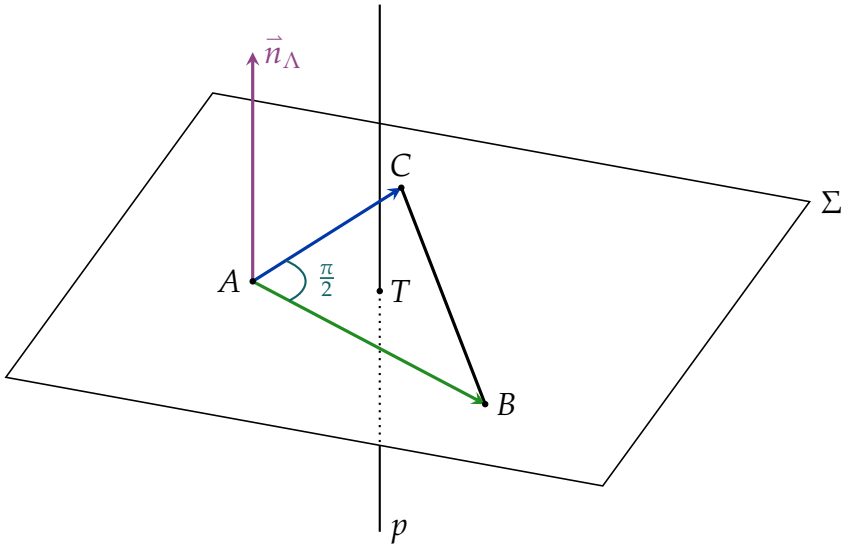
$$1 + t + 2 + t - 2(3 - 2t) = 3.$$

Torej je $t = 1$ in $T'(2,3,1)$. Zdaj lahko izračunamo

$$\|\overrightarrow{TT'}\| = \|[1,1,-2]^\mathsf{T}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

Rešitev naloge 16. ⇧

a. Najprej izračunamo $\overrightarrow{AB} = [3,3,3]^\mathsf{T}$ in $\overrightarrow{AC} = [6,-3,-3]^\mathsf{T}$, potem pa opazimo, da je $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, torej sta vektorja pravokotna in je kot med njima $\frac{\pi}{2} = 90°$.



Slika 7. Skica k nalogi 16.

b. Težišče se izračuna po formuli

$$\vec{r}_T = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) = \frac{1}{3}[18,3,6]^\mathsf{T} = [6,1,2]^\mathsf{T}.$$

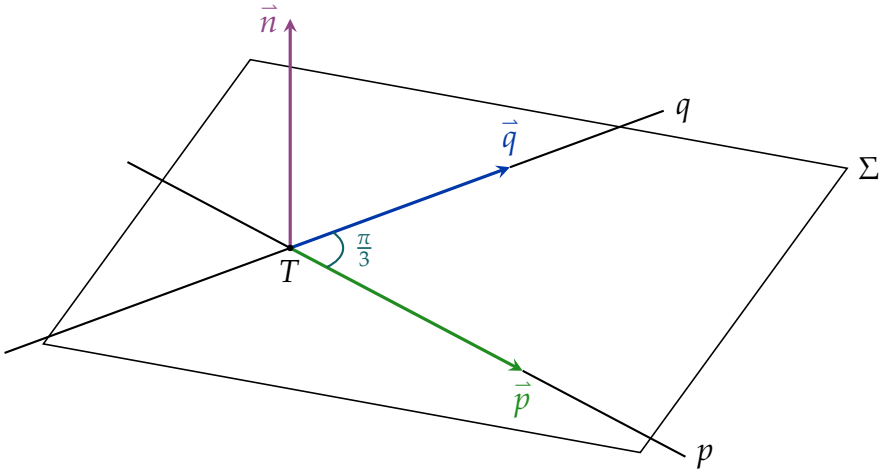
c. Premica, ki bo pravokotna na ravnino trikotnika ABC, bo imela smerni vektor, vzporeden normali, ki jo izračunamo kot

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [0,27,-27]^\mathsf{T}.$$

Naj bo $\vec{p} = [0,1,-1]^\mathsf{T}$. Enačba premice se torej glasi

$$p\colon [6,1,2]^\mathsf{T} + t[0,1,-1]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 17. ⇧



Slika 8. Skica k nalogi 17.

a. Točke na premici p lahko zapišemo kot $[t+1, 3t, 2t+1]^\mathsf{T}$, točke na premici q pa kot $[3s+4, 2s+2, -s]^\mathsf{T}$. Iščemo taki vrednosti za parametra t in s, da bosta zgornji

trojici po komponentah enaki. Iz prve komponente lahko izrazimo $t = 3s + 3$ in vstavimo v drugo, pa dobimo $3(3s + 3) = 2s + 2$ oziroma $s = -1$ in zato $t = 0$. Oboje vstavimo še v enačbo, ki jo dobimo z izenačenjem tretjih komponent in vidimo, da je tudi ta izpolnjena. Točka, ki leži v preseku obeh premic, označimo jo s T, ima torej koordinate $T(1, 0, 1)$.

b. Označimo kot med premicama s φ in smerna vektorja premic z $\vec{p} = [1, 3, 2]^\mathsf{T}$ in $\vec{q} = [3, 2, -1]^\mathsf{T}$. Iz enakosti

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \|\vec{p}\|\|\vec{q}\| \cos\varphi$$

dobimo

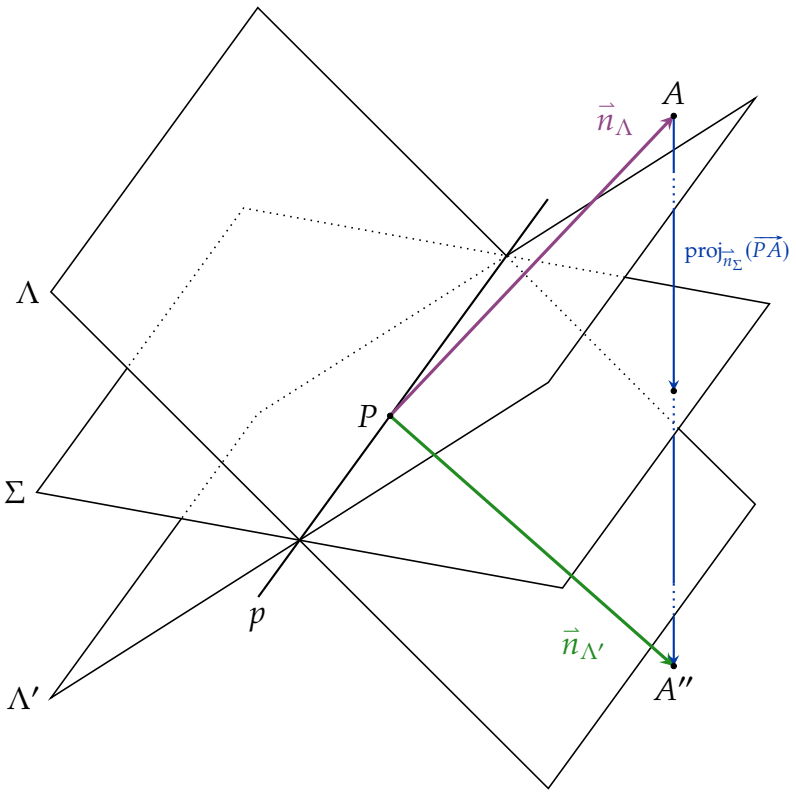
$$\begin{aligned} 3 + 6 - 2 &= \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}\cos\varphi, \\ 7 &= 14\cos\varphi, \\ \cos\varphi &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Torej je $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60°$.

c. Normalni vektor $\vec{n}$ ravnine Σ bo pravokoten na oba smerna vektorja, zato bo vzporeden z vektorskim produktom $\vec{p} \times \vec{q} = [-7, 7, -7]^\mathsf{T}$. Izberimo na primer $\vec{n} = [1, -1, 1]^\mathsf{T}$, za točko na ravnini pa kar presek premic T. Enačba ravnine se potem glasi

$$x - y + z = 2.$$

Rešitev naloge 18. ⇧



Slika 9. Skica k nalogi 18.

a. Za točke, ki ležijo v preseku ravnin, morata biti izpolnjeni obe enačbi. Iz enačbe ravnine Σ izrazimo $x = 2z - y$ in vstavimo v enačbo ravnine Λ, pa dobimo

$2z - y + 2y - z = 1$ oziroma $y = 1 - z$. Točke v preseku so torej $[3z - 1, 1 - z, z]^\mathsf{T}$, kar je ravno parametrizacija premice

$$p\colon [-1, 1, 0]^\mathsf{T} + z[3, -1, 1]^\mathsf{T}.$$

b. Uporabili bomo formulo za zrcaljenje točke A preko ravnine Σ:

$$\vec{r}_{A''} = \vec{r}_A - 2\,\mathrm{proj}_{\vec{n}_\Sigma}(\overrightarrow{PA}),$$

kjer je P poljubna točka na ravnini Σ. V našem primeru je najlažje izbrati eno od točk s premice p, na primer $P(-1, 1, 0)$. Za točko A vzemimo točko s krajevnim vektorjem $\vec{r}_A = \vec{r}_P + \vec{n}_\Lambda$. Na ta način bomo dosegli, da se bo predstavnik normale $\vec{n}_\Lambda = \overrightarrow{PA}$ prezrcalil preko ravnine Σ v vektor $\overrightarrow{PA''}$, ki bo torej predstavljal normalo ravnine Λ'. Najprej posebej izračunajmo $A(0, 3, -1)$ in

$$\mathrm{proj}_{\vec{n}_\Sigma}(\overrightarrow{PA}) = \frac{\vec{n}_\Lambda \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma}\,\vec{n}_\Sigma = \tfrac{5}{6}[1, 1, -2]^\mathsf{T} = \left[\tfrac{5}{6}, \tfrac{5}{6}, -\tfrac{10}{6}\right]^\mathsf{T}.$$

Iz zgornje formule za projekcijo čez ravnino zdaj dobimo

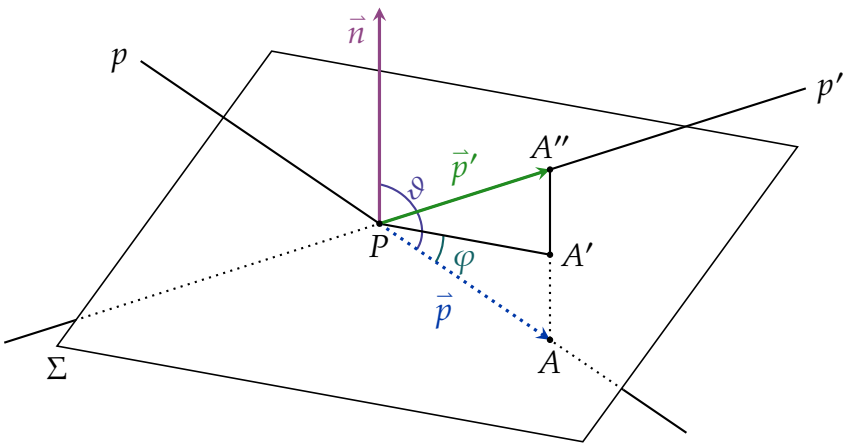
$$\vec{r}_{A''} = [0, 3, -1]^\mathsf{T} - \left[\tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{3}, -\tfrac{10}{3}\right]^\mathsf{T} = \left[-\tfrac{5}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{7}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

Izračunamo še vektor $\overrightarrow{PA''} = \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]^\mathsf{T}$. Za normalo $\vec{n}_{\Lambda'}$ lahko vzamemo katerikoli vzporedni vektor, na primer $\vec{n}_{\Lambda'} = [-2, 1, 7]^\mathsf{T}$. Enačba ravnine Λ' se torej glasi

$$\Lambda'\colon\ -2x + y + 7z = 3.$$

Pri tem smo za točko na ravnini seveda uporabili točko P.

Rešitev naloge 19. ⇧



Slika 10. Skica k nalogi 19.

a. Točke na premici p imajo parametrizacijo $[t, 2t + 1, t + 1]^\mathsf{T}$. Če to vstavimo v enačbo za ravnino Σ, dobimo

$$t - 2(2t + 1) + 2(t + 1) = 1,$$

od koder izračunamo $t = -1$. Točka, ki leži v preseku ravnine Σ in premice p je torej $P(-1, -1, 0)$.

b. Normalni vektor ravnine Σ je $\vec{n} = [1,-2,2]$, smerni vektor premice p pa $\vec{p} = [1,2,1]$. Kosinus kota ϑ med normalo in smernim vektorjem dobimo iz formule

$$\vec{p}\cdot\vec{n} = \|\vec{p}\|\|\vec{n}\|\cos\vartheta.$$

Ker je $\|\vec{p}\| = \sqrt{6}$ in $\|\vec{n}\| = 3$, je

$$1-4+2 = 3\sqrt{6}\cos\vartheta,$$

od koder izrazimo $\cos\vartheta = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$. Izračunamo

$$\arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{6}}\right) \approx 97.8^\circ.$$

Kot med vektorjema je seveda lahko večji od 90°. Kot med premicama, določenima z vektorjema $\vec{p}$ in $\vec{n}$, je v tem primeru enak $\vartheta' \approx 180^\circ - 97.8^\circ = 82.2^\circ$. Kot med premico in ravnino je zato enak

$$\varphi \;=\; 90^\circ - \vartheta' \;\approx\; 90^\circ - 82.2^\circ \;=\; 7.8^\circ.$$

Račun bi malce poenostavili, če bi namesto vektorja $\vec{n}$ uporabili vektor $-\vec{n}$.

c. Prezrcaljena premica p' bo vsebovala točko P, v kateri premica p seka ravnino. Določiti moramo le še smerni vektor $\vec{p}'$. To naredimo tako, da izberemo poljubno od P različno točko A na premici p in jo prezrcalimo čez ravnino Σ v točko A''. Potem bo $\vec{p}'$ vzporeden vektorju $\overrightarrow{PA''}$.
Točko A lahko na primer izberemo tako, da je $\vec{r}_A = \vec{r}_P + \vec{p}$. Dobimo $A(0,1,1)$. Uporabimo formulo

$$\vec{r}_{A''} = \vec{r}_A - 2\,\mathrm{proj}_{\vec{n}_\Sigma}(\overrightarrow{PA}).$$

Najprej izračunamo $\overrightarrow{PA} = [1,2,1]^\mathsf{T}$ in

$$\mathrm{proj}_{\vec{n}_\Sigma}(\overrightarrow{PA}) \;=\; \frac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\,\vec{n} \;=\; -\frac{1}{9}[1,-2,2]^\mathsf{T},$$

nato pa še

$$\vec{r}_{A''} \;=\; [0,1,1]^\mathsf{T} + \frac{2}{9}[1,-2,2] \;=\; \left[\tfrac{2}{9},\tfrac{5}{9},\tfrac{13}{9}\right]^\mathsf{T}.$$

Smerni vektor $\vec{p}'$ bo torej vzporeden vektorju

$$\overrightarrow{PA''} = \vec{r}_{A''} - \vec{r}_P = \left[\tfrac{11}{9},\tfrac{14}{9},\tfrac{13}{9}\right]^\mathsf{T}.$$

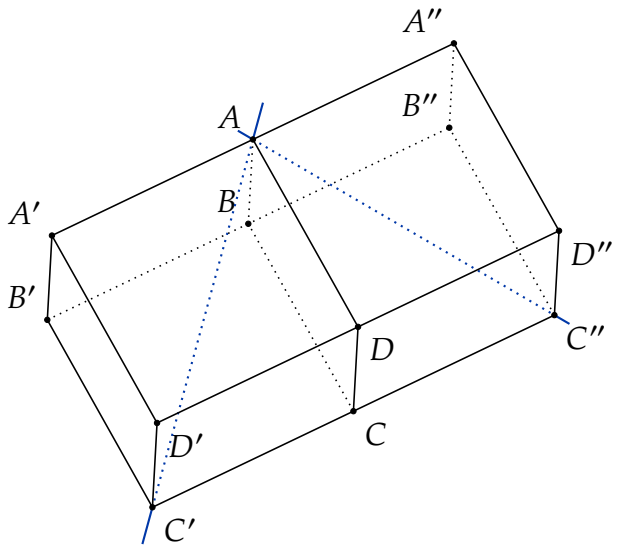
Če izberemo na primer $\vec{p}' = [11,14,13]^\mathsf{T}$, dobimo enačbo

$$p'\colon [-1,-1,0]^\mathsf{T} + t[11,14,13]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 20. ⇧

a. Izračunamo vektorje $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ in $\overrightarrow{DA}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= [-2,-1,-2]^\mathsf{T},\\ \overrightarrow{BC} &= [1,2,-2]^\mathsf{T},\\ \overrightarrow{CD} &= [2,1,2]^\mathsf{T},\\ \overrightarrow{DA} &= [-1,-2,2]^\mathsf{T}.\end{aligned}$$



Slika 11. Skica k nalogi 20.

Ker je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ in $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, so nasprotne stranice v štirikotniku $ABCD$ vzporedne in je $ABCD$ paralelogram. Ker so dolžine vseh zgornjih vektorjev enake, je $ABCD$ romb. Izračunamo še skalarni produkt

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = [-2,-1,-2]^{\mathsf{T}} \cdot [1,2,-2]^{\mathsf{T}} = -2-2+4 = 0.$$

Sledi, da kot pri A meri $\frac{\pi}{2} = 90°$. Ker je $ABCD$ romb, je kot pri C enak kotu pri A, kota pri B in D pa sta komplementarna A, zato so vsi štirje koti pravi. Romb $ABCD$ je torej kvadrat.
Ker je

$$\|CD\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3,$$

je dolžina stranice kvadrata enaka 3, njegova ploščina pa 9.

b. Preostala oglišča kocke dobimo tako, da začnemo v vsakem od oglišč kvadrata in se v smeri, pravokotni na ravnino kvadrata $ABCD$, pomaknemo za dolžino stranice kvadrata. Pravokotno smer določimo s pomočjo vektorskega produkta. Ker je

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = [-2,-1,-2]^{\mathsf{T}} \times [1,2,-2]^{\mathsf{T}} = [6,-6,-3]^{\mathsf{T}},$$

bo iskani vektor dolžine 3 v tej smeri enak $\vec{v} = [2,-2,-1]^{\mathsf{T}}$. Seveda se lahko iz vsake od točk A, B C in D premaknemo za $\vec{v}$ ali pa za $-\vec{v}$, zato sta rešitvi dve. Premik za $\vec{v}$ nam da oglišča

$$A'(4,-1,3), B'(2,-2,1), C'(3,0,-1) \quad \text{in} \quad D'(5,1,1),$$

premik za $-\vec{v}$ pa oglišča

$$A''(0,3,5), B''(-2,2,3), C''(-1,4,1) \quad \text{in} \quad D''(1,5,3).$$

Iskani kocki sta $ABCDA'B'C'D'$ in $ABCDA''B''C''D''$.

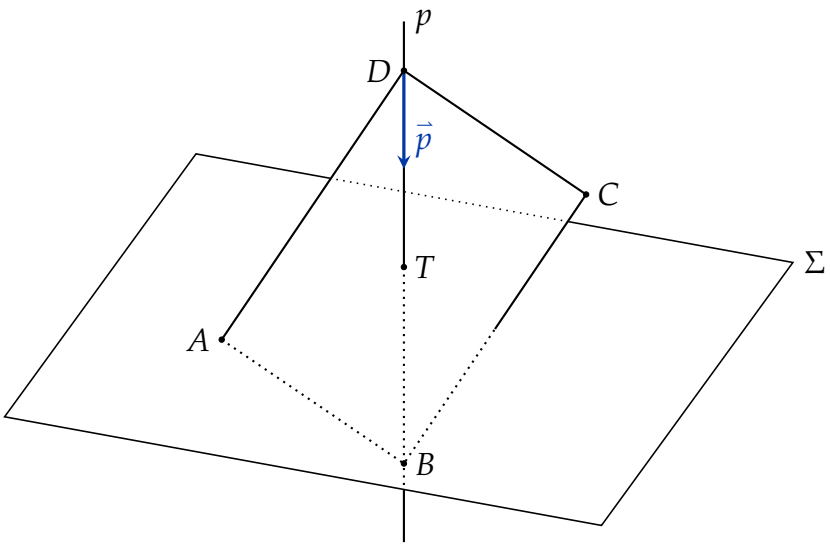
c. Ker imamo dve kocki, bosta rešitvi dve, in sicer premici z enačbama $\vec{r}_A + t\overrightarrow{AC'}$ in $\vec{r}_A + t\overrightarrow{AC''}$. Ker je $\overrightarrow{AC'} = [1,-1,-5]^{\mathsf{T}}$ in $\overrightarrow{AC''} = [-3,3,-3]^{\mathsf{T}}$, dobimo

$$p' \colon [2,1,4]^{\mathsf{T}} + t[1,-1,-5]^{\mathsf{T}}$$

in

$$p'' \colon [2,1,4]^{\mathsf{T}} + t[-3,3,-3]^{\mathsf{T}}.$$

Rešitev naloge 21. ⇧



Slika 12. Skica k nalogi 21.

a. Najprej preverimo, če je naloga dobro sestavljena in je kot med $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{BC}$ pravi. Res, $\overrightarrow{AB} = [1,2,-2]^{\mathsf{T}}$, $\overrightarrow{BC} = [-2,-1,-2]^{\mathsf{T}}$ in $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Zato bo $ABCD$ pravokotnik, če bo vektor $\overrightarrow{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A$ enak vektorju $\overrightarrow{BC}$. Iz enakosti $\vec{r}_D - \vec{r}_A = \overrightarrow{BC}$ dobimo

$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = [2,0,4]^{\mathsf{T}} + [-2,-1,-2]^{\mathsf{T}} = [0,-1,2]^{\mathsf{T}}$$

in iskana točka je torej $D(0,-1,2)$.

b. Smerni vektor premice p bo vzporeden z vektorjem

$$\overrightarrow{BD} = \vec{r}_D - \vec{r}_B = [-3,-3,0]^{\mathsf{T}}.$$

Izberimo na primer $\vec{p} = [1,1,0]^{\mathsf{T}}$. Ker bo premica p vsebovala tudi točko D, dobimo enačbo

$$p \colon [0,-1,2]^{\mathsf{T}} + t[1,1,0]^{\mathsf{T}}.$$

c. Ravnina bo pravokotna na premico p, če bo $\vec{p}$ njena normala. Ker je $\vec{p} \cdot \vec{r}_A = 2$, se enačba ravnine glasi

$$x + y = 2.$$

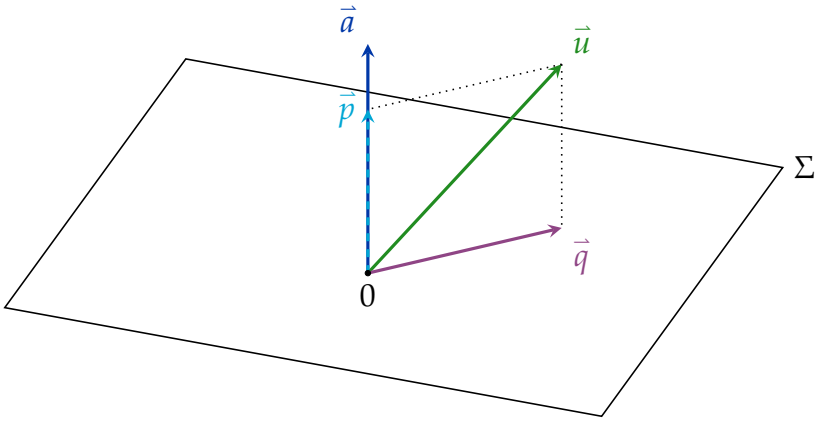
Rešitev naloge 22. ⇧

a. Ker je

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \frac{6 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)}{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{9}{9},$$

je projekcija vektorja $\vec{u}$ na vektor $\vec{a}$ enaka

$$\vec{p} = \operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a} = \vec{a} = [2,2,-1]^{\mathsf{T}}.$$



Slika 13. Skica k nalogi 22.

b. Na ravnino Σ so pravokotni vsi vektorji oblike $[4k, 4k, -2k]^\mathsf{T}$, torej tudi $\vec{p}$, ki ga dobimo pri $k = \frac{1}{2}$.
c. Ker smo že izračunali pravokotno projekcijo $\vec{p}$ vektorja $\vec{u}$ na normalo ravnine, je

$$\vec{q} \;=\; \vec{u} - \vec{p} \;=\; [6,0,3]^\mathsf{T} - [2,2,-1]^\mathsf{T} \;=\; [4,-2,4]^\mathsf{T}.$$

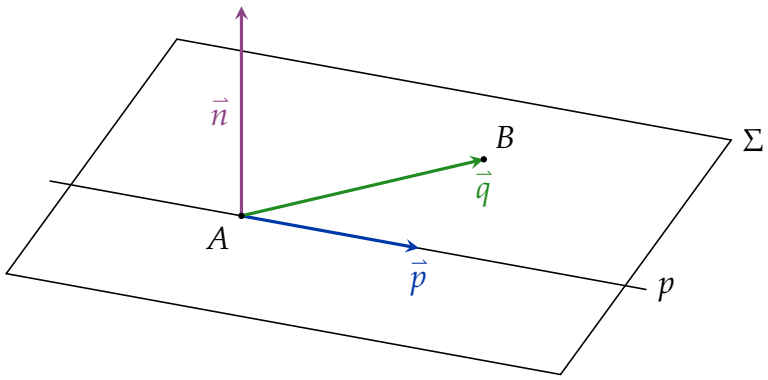
Če tega ne opazimo, moramo izbrati dva linearno neodvisna vektorja v ravnini Σ, na primer $\vec{v}_1 = [1,-1,0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_2 = [1,1,4]^\mathsf{T}$, in izračunati koeficienta

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1} \;=\; \frac{6}{2} = 3 \quad \text{in} \quad \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2} \;=\; \frac{18}{18} = 1,$$

potem pa dobimo $\vec{q}$ kot

$$\vec{q} \;=\; 3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \;=\; [3,-3,0]^\mathsf{T} + [1,1,4]^\mathsf{T} \;=\; [4,-2,4]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 23. ⇧



Slika 14. Skica k nalogi 23.

a. Premica p ima parametrično enačbo

$$p\colon [1,1,3]^\mathsf{T} + t[2,1,3]^\mathsf{T}.$$

Koordinate točk na premici so torej $x = 1 + 2t$, $y = 1 + t$ in $z = 3 + 3t$. Če iz vsake od teh enačb izrazimo t, dobimo kanonsko obliko enačbe premice p,

$$p\colon \frac{x-1}{2} = y - 1 = \frac{z-3}{3}.$$

b. Najprej poiščimo dva vektorja, ki ležita v ravnini Σ. Eden bo

$$\vec{q} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = [2,1,4]^\mathsf{T} - [1,1,3]^\mathsf{T} = [1,0,1]^\mathsf{T}.$$

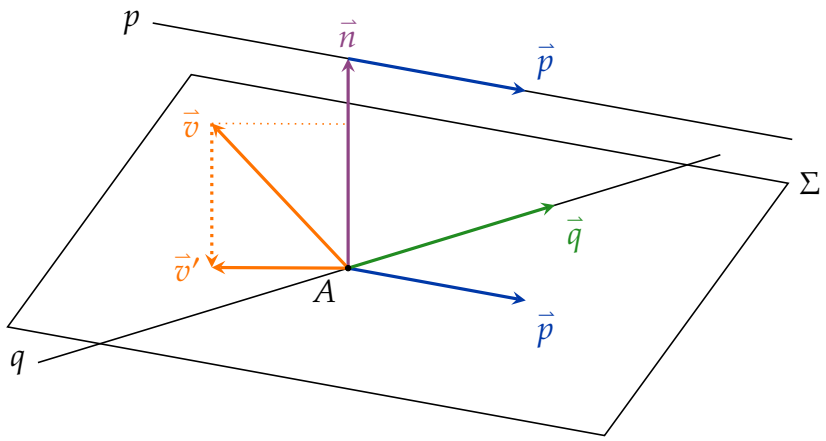
Drugi je lahko kar smerni vektor $\vec{p}$. Normala ravnine bo pravokotna na oba, zato bo

$$\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q} = [2,1,3]^\mathsf{T} \times [1,0,1]^\mathsf{T} = [1,1,-1]^\mathsf{T}.$$

Za točko na ravnini izberemo A in izračunamo $\vec{n} \cdot \vec{r}_A = -1$. Enačba ravnine je torej

$$\Sigma\colon x + y - z = -1.$$

Rešitev naloge 24. ⇧



Slika 15. Skica k nalogi 24.

a. Ker Σ vsebuje premico p in je vzporedna premici q, bosta oba smerna vektorja ležala v ravnini Σ. To pomeni, da bo normala vzporedna vektorskemu produktu

$$\vec{p} \times \vec{q} = [0,1,-1]^\mathsf{T} \times [2,1,-2]^\mathsf{T} = [-1,-2,-2]^\mathsf{T}.$$

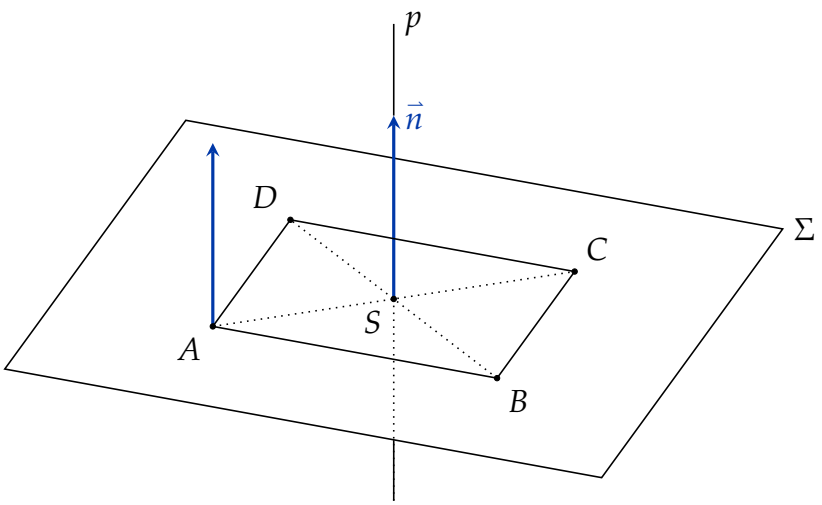
Izberimo $\vec{n} = [1,2,2]^\mathsf{T}$. Za točko na ravnini vzamemo A in izračunamo $\vec{r}_A \cdot \vec{n} = 3$. Enačba ravnine je torej

$$\Sigma\colon x + 2y + 2z = 3.$$

b. Najlažje je, če od vektorja $\vec{v}$ odštejemo njegovo projekcijo na normalo ravnine Σ:

$$\begin{aligned}
\vec{v}' &= \vec{v} - \operatorname{proj}_{\vec{n}}\vec{v} = \\
&= \vec{v} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\,\vec{n} = \\
&= \vec{v} - \frac{9}{9}\vec{n} = \\
&= [-3,3,3]^\mathsf{T} - [1,2,2]^\mathsf{T} = \\
&= [-4,1,1]^\mathsf{T}.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 25. ⇧



Slika 16. Skica k nalogi 25.

a. Za točko D bo veljalo, da je $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, torej bo $\vec{r}_D - \vec{r}_A = \vec{r}_C - \vec{r}_B$. Od tu izrazimo

$$\vec{r}_D = \vec{r}_C - \vec{r}_B + \vec{r}_A = [-1,4,5]^\mathsf{T} - [1,2,3]^\mathsf{T} + [1,0,-1]^\mathsf{T} = [-1,2,1]^\mathsf{T},$$

torej je $D(-1,2,1)$.

b. Vsi vektorji s krajišči v teh štirih točkah bodo ležali v ravnini Σ, zato bo vektorski produkt poljubnih dveh linearno neodvisnih pravokoten na ravnino. Na primer,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [0,2,4]^\mathsf{T} \times [-2,4,6]^\mathsf{T} = [-4,-8,4]^\mathsf{T},$$

zato lahko za normalo ravnine vzamemo $\vec{n} = [1,2,-1]^\mathsf{T}$. Ker je $\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 2$, je enačba ravnine

$$\Sigma\colon x + 2y - z = 2.$$

c. Premica p ima za smerni vektor kar normalo ravnine, tj. $\vec{p} = \vec{n}$. Poiskati moramo še središče paralelograma S. Ležalo bo v razpolovišču obeh diagonal, zato bo

$$\vec{r}_S = \tfrac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_C) = [0,2,2]^\mathsf{T}.$$

Enačba premice p je torej

$$p\colon [0,2,2]^\mathsf{T} + t[1,2,-1]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 26. ⇧

a. Premici bosta vsebovali točko A, smerna vektorja pa bosta enaka $\vec{u}$ in $\vec{v}$. Torej

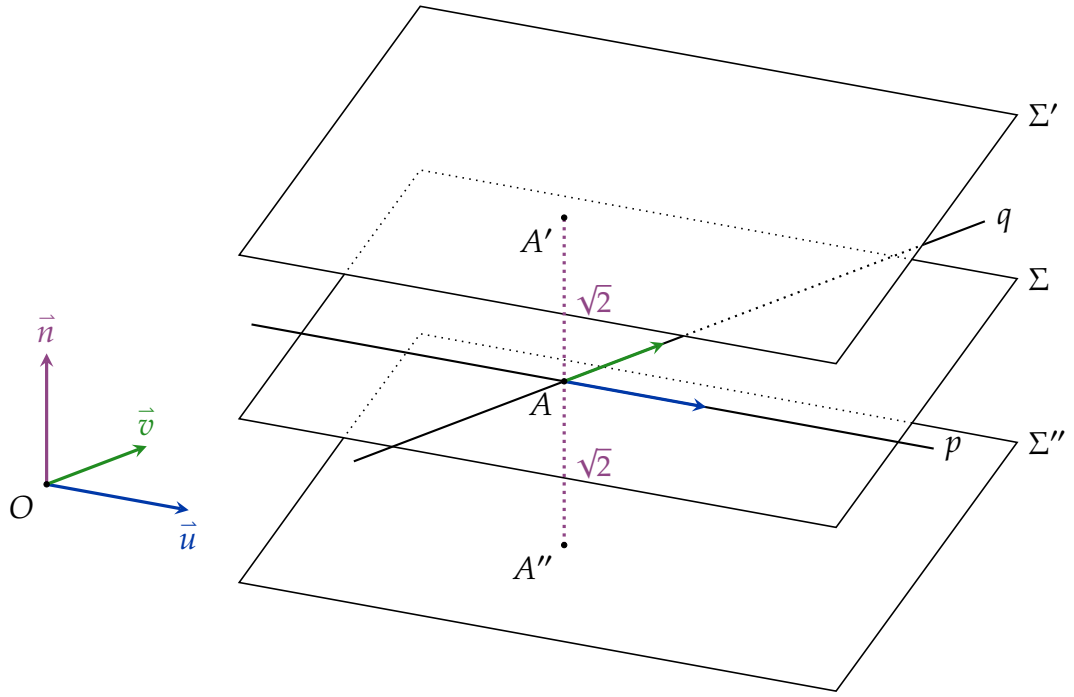
$$p\colon [1,3,5]^\mathsf{T} + t[1,1,0]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad q\colon [1,3,5]^\mathsf{T} + s[2,2,1]^\mathsf{T}.$$

b. Ker ravnina vsebuje smerna vektorja $\vec{p} = \vec{u}$ in $\vec{q} = \vec{v}$, lahko normalni vektor ravnine Σ dobimo kot vektorski produkt

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = [1,1,0]^\mathsf{T} \times [2,2,1]^\mathsf{T} = [1,-1,0]^\mathsf{T}.$$

Ker je $A \in \Sigma$ in $\vec{r}_A \cdot \vec{n} = -2$, ima ravnina enačbo

$$\Sigma\colon x - y = -2.$$



Slika 17. Skica k nalogi 26.

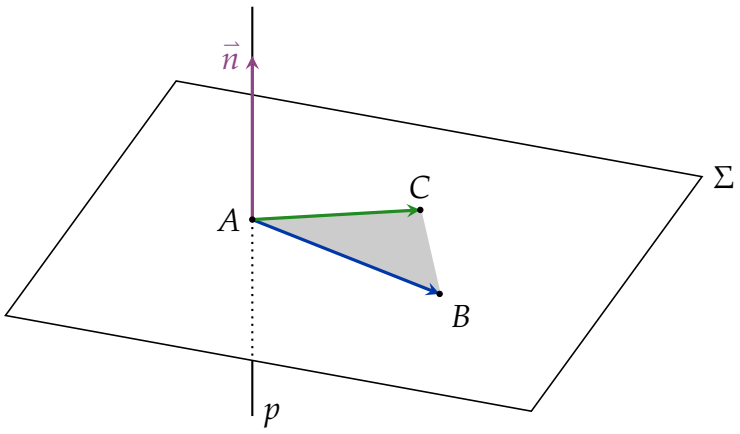
c. Ravnini, ki sta od Σ oddaljeni za $\sqrt{2}$, bosta z ravnino Σ vzporedni, zato bosta imeli isto normalo. Vsebovali bosta točki A' oziroma A'', ki ju dobimo tako, da se iz A premaknemo vzdolž normale za $\pm\sqrt{2}$. Torej

$$\vec{r}_A \pm \sqrt{2}\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = [1,3,5]^\mathsf{T} \pm \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1,0]^\mathsf{T} = [1,3,5]^\mathsf{T} \pm [1,-1,0]^\mathsf{T}.$$

Dobimo točki $A'(2,2,5)$ in $A''(0,4,5)$. Ker je $\vec{r}_{A'}\cdot\vec{n} = 0$ in $\vec{r}_{A''}\cdot\vec{n} = -4$, imata ravnini enačbi

$$\Sigma'\colon x - y = 0 \quad \text{in} \quad \Sigma''\colon x - y = -4.$$

Rešitev naloge 27. ⇧



Slika 18. Skica k nalogi 27.

a. Najprej izračunajmo vektorski produkt

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \;=\; [4,1,-1]^{\mathsf{T}} \times [2,1,0]^{\mathsf{T}} \;=\; [1,-2,2]^{\mathsf{T}}.$$

Potem je

$$S_{ABC} \;=\; \tfrac{1}{2}\|[1,-2,2]^{\mathsf{T}}\| \;=\; \tfrac{1}{2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} \;=\; \tfrac{3}{2}.$$

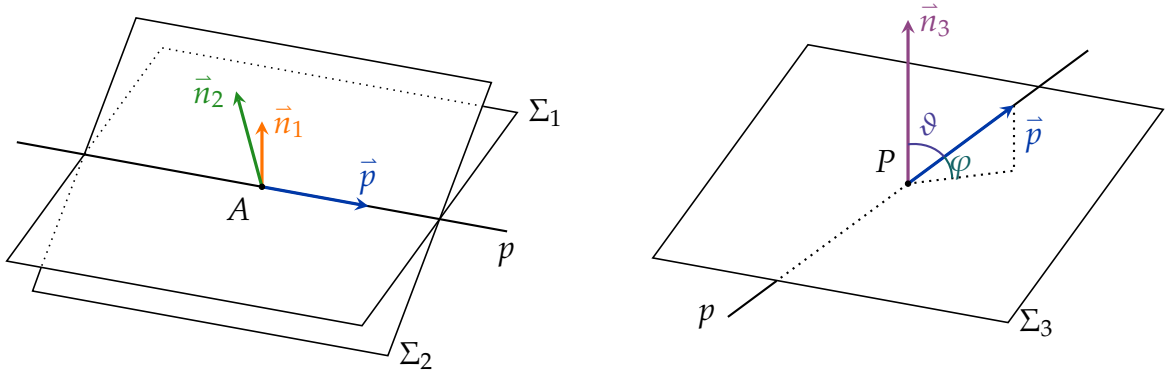
b. Normala ravnine je $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [1,-2,2]^{\mathsf{T}}$. Ker je $\vec{r}_A \cdot \vec{n} = 8$, je njena enačba

$$\Sigma\colon x - 2y + 2z = 8.$$

c. Premica ima za smerni vektor normalo ravnine in vsebuje točko A, zato je njena enačba enaka

$$p\colon [0,-1,3]^{\mathsf{T}} + t[1,-2,2]^{\mathsf{T}}.$$

Rešitev naloge 28. ⇧



(a) (b) in (c)

Slika 19. Skica k nalogi 28.

a. Točke na premici p ležijo na ravninah Σ_1 in Σ_2, zato ustrezajo obema enačbama. Dobimo sistem

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3, \\ 3x + y + 2z &= 2. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe najlažje izrazimo $y = 2x - 2z - 3$. To vstavimo v drugo enačbo in dobimo $2 = 3x + 2x - 2z + 3 + 2z = 5x - 3$, od koder takoj sledi $x = 1$ in zato $y = -2z - 1$. Točke na premici p so torej oblike $[1,-2z-1,z]^{\mathsf{T}}$, parametrična enačba premice pa je zato enaka

$$p\colon [1,-1,0]^{\mathsf{T}} + z[0,-2,1]^{\mathsf{T}}.$$

Seveda bi lahko nalogo rešili tudi tako, da bi za smerni vektor premice p vzeli vektorski produkt normal $\vec{n}_1$ in $\vec{n}_2$, za točko na premici pa uganili eno točko A, ki zadošča obema enačbama.

b. Videli smo že, da so točke na premici p oblike $[1,-2z-1,z]^{\mathsf{T}}$. To vstavimo v enačbo tretje ravnine in dobimo

$$-4 \;=\; 1 - (-2z-1) - 5z \;=\; 1 + 2z + 1 - 5z \;=\; 2 - 3z,$$

od koder takoj sledi $z = 2$. Premica p in ravnina Σ_3 se torej sekata v točki $P(1, -5, 2)$. Seveda točka P leži tudi na ravninah Σ_1 in Σ_2, torej se v tej točki sekajo vse tri ravnine.

c. Najprej iščemo kot ϑ med smernim vektorjem $\vec{p} = [0, -2, 1]^\mathsf{T}$ premice p in normalo $\vec{n}_3 = [-1, 1, 5]^\mathsf{T}$ ravnine Σ_3. Uporabili bomo formulo

$$\vec{n}_3 \cdot \vec{p} = \|\vec{n}_3\|\|\vec{p}\| \cos\vartheta,$$

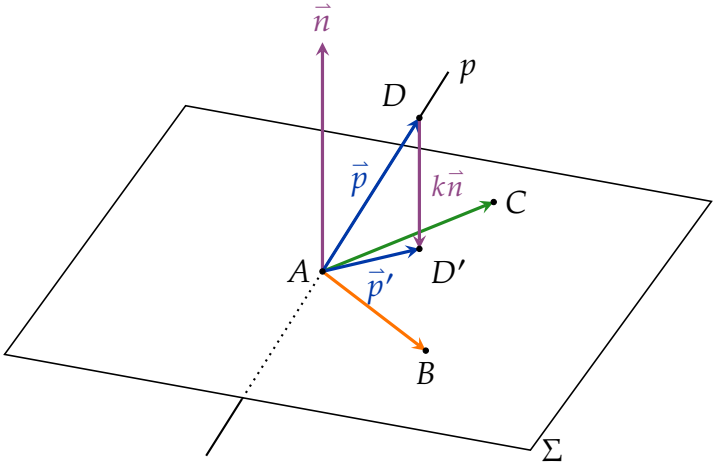
kjer smo s ϑ označili iskani kot. Dobimo

$$\begin{aligned} 0 \cdot -1 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 5 &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 5^2}\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2}\cos\vartheta, \\ 3 &= \sqrt{27}\sqrt{5}\cos\vartheta, \\ 3 &= 3\sqrt{3}\sqrt{5}\cos\vartheta, \\ \cos\vartheta &= \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \vartheta &\approx \arccos(0.258) \\ \vartheta &\approx 75°. \end{aligned}$$

Kot med premico in ravnino je torej enak

$$\varphi = 90° - \vartheta \approx 90° - 75° = 15°.$$

Rešitev naloge 29.



Slika 20. Skica k nalogi 29.

a. Ker vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$ ležita v ravnini Σ, bo njena normala $\vec{n}$ vzporedna vektorskemu produktu

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [1, 2, -2]^\mathsf{T} \times [0, 0, -3]^\mathsf{T} = [-6, 3, 0]^\mathsf{T}.$$

Naj bo $\vec{n} = [2, -1, 0]^\mathsf{T}$. Ker je $\vec{r}_A \cdot \vec{n} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 3$, je iskana enačba ravnine

$$\Sigma\colon 2x - y = 3.$$

b. Smerni vektor premice p bo vzporeden vektorju $\overrightarrow{AD} = [0, 5, 0]^\mathsf{T}$. Naj bo $\vec{p} = [0, 1, 0]^\mathsf{T}$. Za točko na premici p lahko vzamemo kar A. Dobimo

$$p\colon [1, -1, 3] + t[0, 1, 0]^\mathsf{T}.$$

c. Pravokotna projekcija p' premice p na ravnino Σ bo vsebovala točko A, v kateri premica p seka ravnino. Izberemo še eno od A različno točko na premici p, na primer kar dano točko D, in jo projiciramo na Σ v točko D'. Iz D se torej premaknemo za nek večkratnik normale in pristanemo na Σ:

$$\vec{r}_{D'} = \vec{r}_D + k\vec{n} = [1,4,3]^\mathsf{T} + k[2,-1,0]^\mathsf{T} = [1+2k, 4-k, 3]^\mathsf{T}.$$

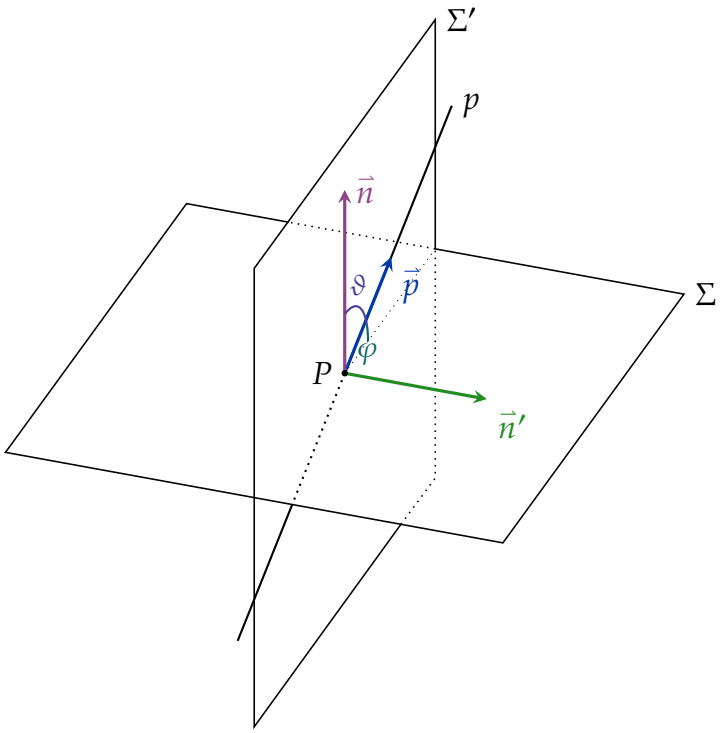
Ker D' leži na Σ, velja $2(1+2k) - (4-k) = 3$ oziroma $k = 1$. Ker je

$$\overrightarrow{AD'} = \vec{r}_{D'} - \vec{r}_A = [3,3,3]^\mathsf{T} - [1,-1,3]^\mathsf{T} = [2,4,0]^\mathsf{T},$$

lahko za smerni vektor premice p' izberemo $\vec{p}' = [1,2,0]^\mathsf{T}$ in dobimo enačbo premice

$$p' \colon [1,-1,3]^\mathsf{T} + t[1,2,0]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 30. ⇧



Slika 21. Skica k nalogi 30.

a. Najprej izračunamo kot ϑ med normalo ravnine $\vec{n} = [1,1,0]^\mathsf{T}$ in smernim vektorjem premice $\vec{p} = [1,2,2]^\mathsf{T}$ iz zveze

$$\vec{n} \cdot \vec{p} = \|\vec{n}\|\|\vec{p}\| \cos\vartheta.$$

Dobimo

$$\begin{aligned} 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 2 &= \sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cos\vartheta, \\ 3 &= \sqrt{9}\sqrt{2}\cos\vartheta, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Sklepamo, da je $\vartheta = \frac{\pi}{4} = 45°$. Iskani kot med premico in ravnino je $\varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta = \frac{\pi}{4}$.

b. Točke na premici p so oblike $[1+t, -2+2t, -3+2t]^\mathsf{T}$. Če to vstavimo v enačbo ravnine Σ, dobimo $(1+t)+(-2+2t) = 5$ oziroma $t = 2$. Točka, v kateri se premica p in ravnina Σ sekata, je torej $P(3,2,1)$.

c. Ker ravnina Σ' vsebuje premico p, bo njena normala $\vec{n}'$ pravokotna na smerni vektor $\vec{p}$ premice p. Ker je ravnina Σ' pravokotna na ravnino Σ, bosta tudi vektorja $\vec{n}'$ in $\vec{n}$ pravokotna. Normala $\vec{n}'$ bo torej vzporedna vektorskemu produktu

$$\vec{p} \times \vec{n} = [1,2,2]^\mathsf{T} \times [1,1,0]^\mathsf{T} = [-2,2,-1]^\mathsf{T}.$$

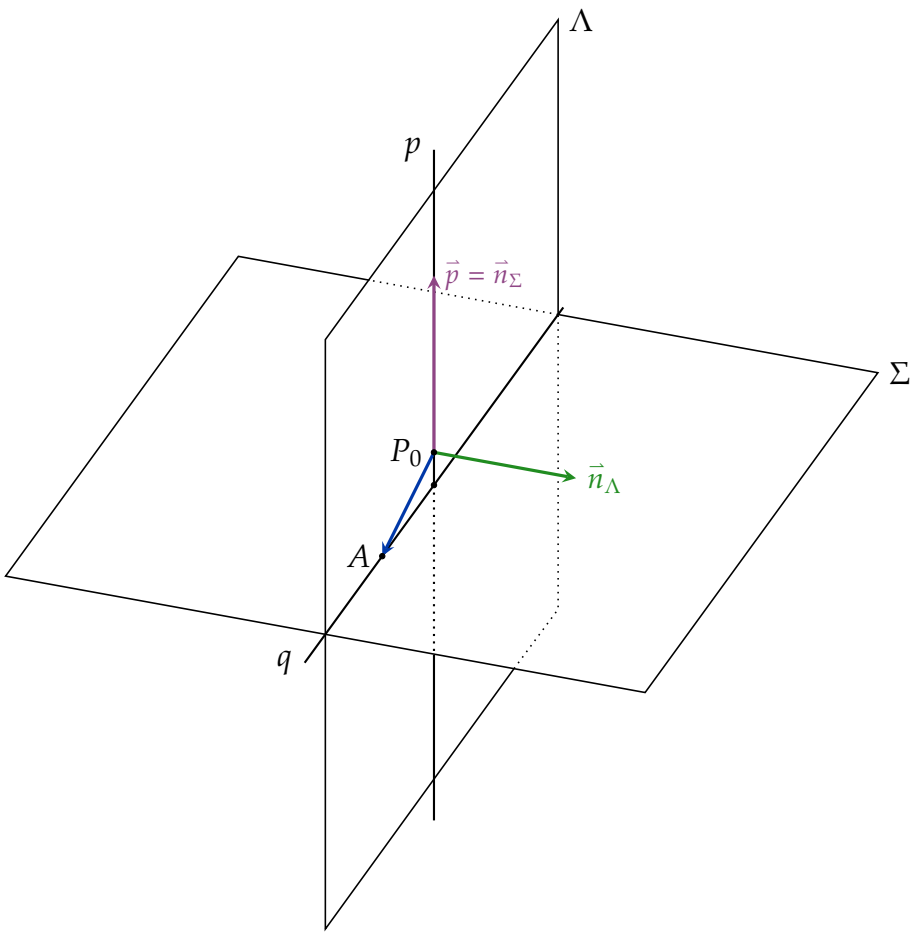
Naj bo $\vec{n}' = [2,-2,1]^\mathsf{T}$. Ker je $P \in \Sigma'$ in je

$$\vec{n}' \cdot \vec{r}_P = [2,-2,1]^\mathsf{T} \cdot [3,2,1]^\mathsf{T} = 6-4+1 = 3,$$

je iskana enačba ravnine

$$\Sigma' \colon 2x - 2y + z = 3.$$

Rešitev naloge 31.



Slika 22. Skica k nalogi 31.

a. Ker je ravnina Σ pravokotna na premico p, lahko za njeno normalo vzamemo kar smerni vektor premice. Torej je $\vec{n}_\Sigma = \vec{p} = [1,2,1]^\mathsf{T}$. Ker je

$$\vec{n}_\Sigma \cdot \vec{r}_A = [1,2,1]^\mathsf{T} \cdot [1,1,1]^\mathsf{T} = 1+2+1 = 4,$$

se iskana enačba glasi

$$\Sigma\colon x + 2y + z = 4.$$

b. Točke na premici p so oblike $[t+1, 2t, t+1]^\mathsf{T}$, $t \in \mathbb{R}$. Ker pri nobenem t ne velja

$$[t+1, 2t, t+1]^\mathsf{T} = [1,1,1]^\mathsf{T},$$

točka A ne leži na premici p. To pomeni, da točka A in premica p določata natanko eno ravnino Λ. Če bi točka A ležala na premici p, bi bilo rešitev neskončno. Ker ravnina Λ vsebuje premico p, je normalni vektor $\vec{n}_\Lambda$ pravokoten na smerni vektor premice $\vec{p}$. Prav tako je $\vec{n}_\Lambda$ pravokoten na vektorje $\overrightarrow{PA}$ za vse točke $P \in p$. Naj bo $P_0(1,0,1)$. Potem je $\overrightarrow{P_0A} = [0,1,0]^\mathsf{T}$ in normala $\vec{n}_\Lambda$ je vzporedna vektorskemu produktu

$$\vec{p} \times \overrightarrow{P_0A} = [1,2,1]^\mathsf{T} \times [0,1,0]^\mathsf{T} = [-1,0,1]^\mathsf{T}.$$

Naj bo $\vec{n}_\Lambda = [1,0,-1]^\mathsf{T}$. Ker je

$$\vec{n}_\Lambda \cdot \vec{r}_A = [1,0,-1]^\mathsf{T} \cdot [1,1,1]^\mathsf{T} = 1 - 1 = 0,$$

je

$$\Lambda\colon x - z = 0$$

iskana enačba.

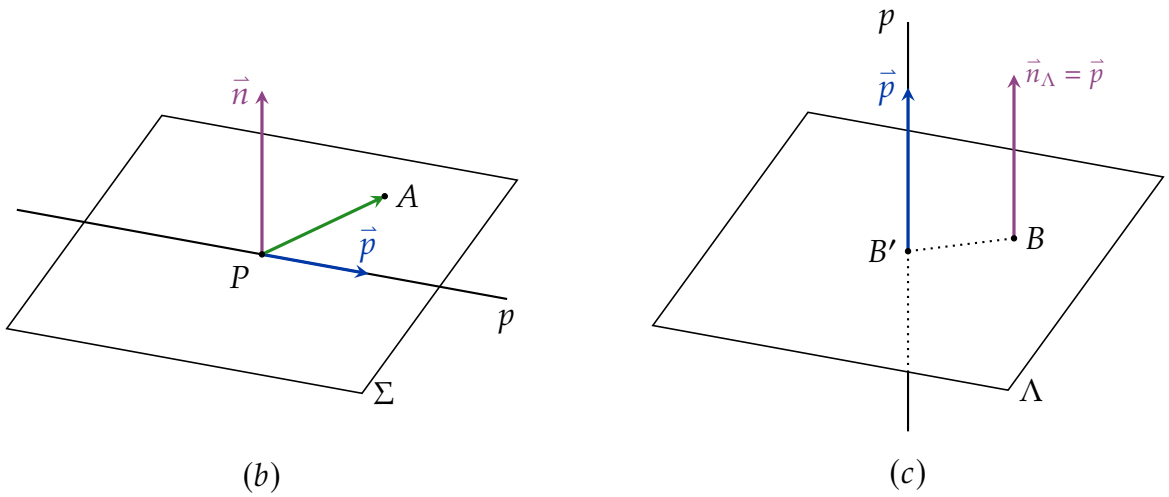
c. Točke na premici q bodo rešitve sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4,\\ x - z &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge enačbe izrazimo $z = x$ in vstavimo v prvo in delimo z 2, pa dobimo $x + y = 2$ oziroma $y = 2 - x$. Točke na premici q so torej oblike $[x, 2-x, x]^\mathsf{T}$. Enačba premice q je

$$q\colon [0,2,0]^\mathsf{T} + t[1,-1,1]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 32. ⇧



(b) (c)

Slika 23. Skica k nalogi 32.

a. Ploščina je enaka

$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \tfrac{1}{2}\|[0,-2,-2]^\mathsf{T} \times [-2,-1,0]^\mathsf{T}\| = \\ = \tfrac{1}{2}\|[-2,4,-4]^\mathsf{T}\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{4+16+16} = \tfrac{1}{2}\sqrt{36} = 3.$$

b. Na ravnini bodo poleg točke A ležale tudi vse točke s premice p, med njimi tudi točka $P(4,-2,1)$. Zato bo normala ravnine $\vec{n}$ pravokotna na vektor $\overrightarrow{PA} = [1,-4,0]^\mathsf{T}$. Prav tako bo $\vec{n}$ pravokotna na smerni vektor $\vec{p} = [2,-1,1]^\mathsf{T}$ premice p. Ker je

$$\overrightarrow{PA} \times \vec{p} = [1,-4,0]^\mathsf{T} \times [2,-1,1]^\mathsf{T} = [4,1,-7]^\mathsf{T},$$

lahko za normalno ravnine vzamemo kar vektor $\vec{n} = [4,1,-7]^\mathsf{T}$. Izračunamo še

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_P = [4,1,-7]^\mathsf{T} \cdot [4,-2,1]^\mathsf{T} = 16 - 2 - 7 = 7$$

in zaključimo, da je enačba ravnine

$$\Sigma\colon\ 4x + y - 7z = 7.$$

c. Poiščimo ravnino Λ skozi B, ki ima za normalo vektor $\vec{p}$, in poglejmo, v kateri točki seka premico p. To presečišče bo B'. Ker je

$$\vec{p} \cdot \vec{r}_B = [2,-1,1]^\mathsf{T} \cdot [3,0,-1]^\mathsf{T} = 6 - 0 - 1 = 5,$$

je

$$\Lambda\colon\ 2x - y + z = 5.$$

Točke na premici p so oblike

$$\vec{r}(k) = [4,-2,1]^\mathsf{T} + k[2,-1,1]^\mathsf{T} = [4+2k, -2-k, 1+k]^\mathsf{T}.$$

Če to vstavimo v enačbo ravnine Λ, dobimo enačbo

$$2(4+2k) - (-2-k) + (1+k) = 5$$

z rešitvijo $k = -1$. Iz

$$\vec{r}(-1) = [4+2(-1), -2-(-1), 1+(-1)]^\mathsf{T} = [2,-1,0]^\mathsf{T}$$

dobimo iskano točko $B'(2,-1,0)$.

Rešitev naloge 33. ⇧

a. Iz enačbe za Λ izrazimo $x = 3 + y$ in vstavimo v enačbo za Σ, pa dobimo $3 + y + 2y = 3 + 3z$ oziroma $y = z$. Točke na preseku obeh ravnin so torej oblike $[3+z, z, z]^\mathsf{T}$, zato je iskana parametrizacija premice

$$p\colon\ [3,0,0]^\mathsf{T} + z[1,1,1]^\mathsf{T}.$$

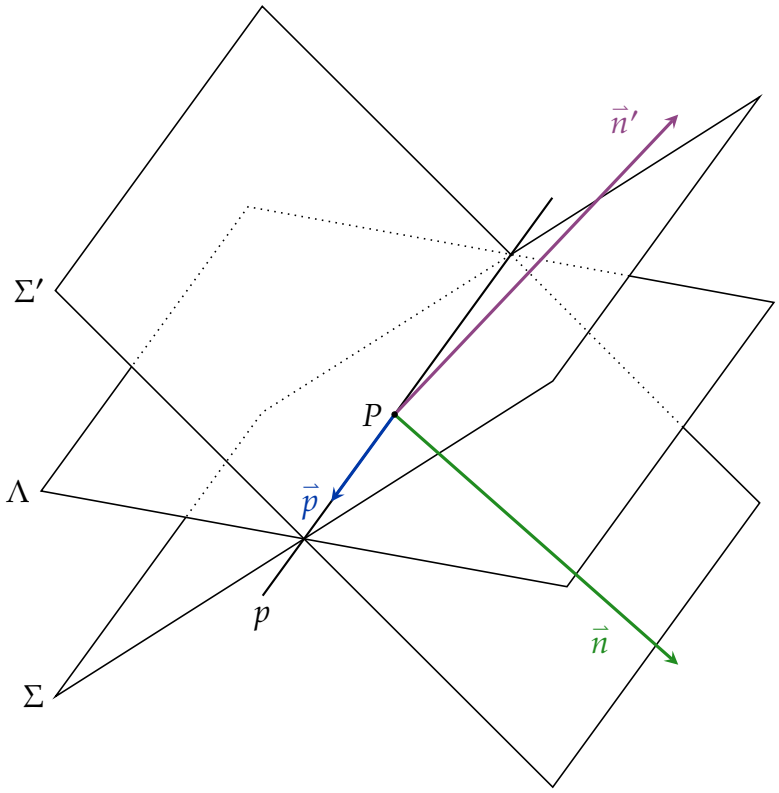
b. Ravnina Σ' bo vsebovala premico p, zato bo njena normala $\vec{n}'$ pravokotna na $\vec{p} = [1,1,1]^\mathsf{T}$. Poleg tega pa bo $\vec{n}'$ pravokotna na normalo $\vec{n}$ ravnine Σ, $\vec{n} = [1,2,-3]^\mathsf{T}$. Naj bo torej

$$\vec{n}' = \vec{p} \times \vec{n} = [1,1,1]^\mathsf{T} \times [1,2,-3]^\mathsf{T} = [-5,4,1]^\mathsf{T}.$$

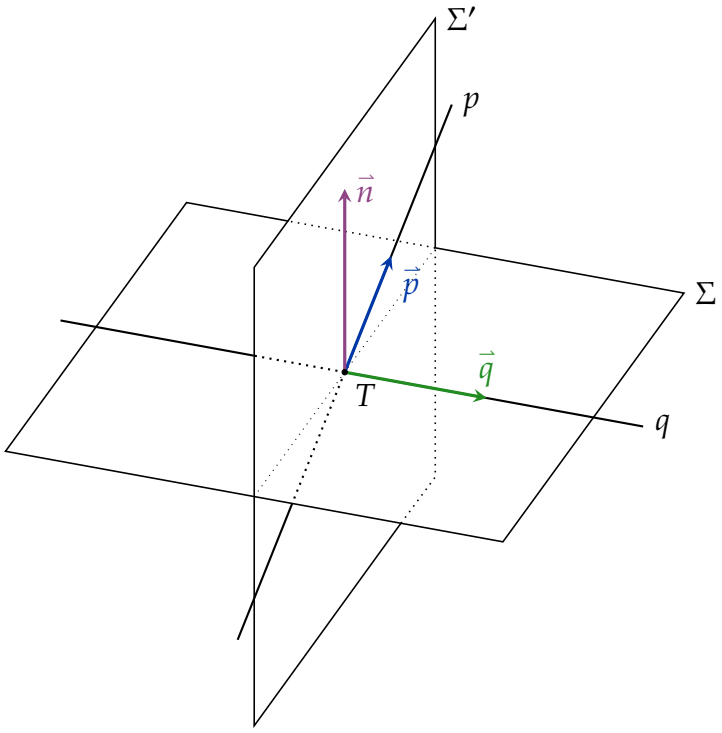
Za točko na ravnini Σ' lahko vzamemo katerokoli točko s premice p, na primer $P(3,0,0)$. Ker je $\vec{n}' \cdot \vec{r}_P = -5 \cdot 3 = -15$, je iskana enačba ravnine

$$\Sigma'\colon\ -5x + 4y + z = -15.$$

Rešitev naloge 34. ⇧



Slika 24. Skica k nalogi 33.



Slika 25. Skica k nalogi 34.

a. Točke na premici p so oblike

$$[2, 0, -1]^\mathsf{T} + k[3, -1, 2]^\mathsf{T} = [2 + 3k, -k, -1 + 2k]^\mathsf{T}.$$

Če to vstavimo v enačbo za ravnino Σ, dobimo enačbo

$$2(2+3k)-(-k)+(-1+2k)=3$$

z rešitvijo $k=0$. Iskano presečišče premice p in ravnine Σ je torej točka $T(2,0,-1)$.

b. Ker premica q leži v ravnini Σ, je njen smerni vektor $\vec{q}$ pravokoten na normalo $\vec{n}=[2,-1,1]^\mathsf{T}$. Ker premica q seka premico p pod pravim kotom, je $\vec{q}$ pravokoten tudi na $\vec{p}=[3,-1,2]^\mathsf{T}$. Naj bo zato

$$\vec{q}=\vec{p}\times\vec{n}=[3,-1,2]^\mathsf{T}\times[2,-1,1]^\mathsf{T}=[1,1,-1]^\mathsf{T}.$$

Za točko na premici q lahko vzamemo kar točko T. Enačba premice q je torej

$$q\colon [2,0,-1]^\mathsf{T}+t[1,1,-1]^\mathsf{T}.$$

c. Ker ravnina Λ vsebuje premico p, bo njena normala pravokotna na $\vec{p}$. Ker je ravnina Λ pravokotna na ravnino Σ, bo njena normala pravokotna na $\vec{n}$. Za normalo ravnine Λ lahko torej vzamemo kar vektor $\vec{q}$. Ker točka T leži na ravnini Λ in je

$$\vec{q}\cdot\vec{r}_T=[1,1,-1]^\mathsf{T}\cdot[2,0,-1]^\mathsf{T}=3,$$

je iskana enačba

$$\Lambda\colon x+y-z=3.$$

2. Sistemi linearnih enačb

Rešitev naloge 35.

a. Ta sistem je linearen sistem dveh enačb z dvema neznankama x_1 in x_2.
b. Ta sistem ni linearen, ker se poleg neznank x_1, x_2 in x_3 pojavita še produkta x_1x_2 in x_2x_3.
c. To je linearen sistem dveh enačb s tremi neznankami x_1, x_2 in x_3.
d. Ta sistem ni linearen, ker se poleg neznank x_1, x_2 in x_3 pojavita še izraza $\cos(x_2)$ in e^{x_3}.
e. To je linearen sistem treh enačb s tremi neznankami.

Rešitev naloge 36.

Sistem

$$\begin{aligned}2x_1-x_2&=-1,\\5x_1+2x_2&=8,\end{aligned}$$

lahko zapišemo v obliki $A\vec{x}=\vec{b}$ pri

$$A=\begin{bmatrix}2&-1\\5&2\end{bmatrix},\ \vec{b}=\begin{bmatrix}-1\\8\end{bmatrix}\quad\text{in}\quad\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.$$

Sistem

$$\begin{aligned}x_1-x_2+2x_3&=\pi-x_3,\\2x_1-2x_3&=e,\end{aligned}$$

lahko zapišemo v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$ pri

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ \vec{b} = \begin{bmatrix} \pi \\ e \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Sistem

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + \left(\sin\frac{\pi}{4}\right) x_3 &= 2, \\ (\sqrt{17} + \cos\pi)x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 &= 1, \end{aligned}$$

lahko zapišemo v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$ pri

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & \sin\frac{\pi}{4} \\ \sqrt{17} + \cos\pi & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \ \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 37. ⇧

a. Sistem ima dve enačbi in dve neznanki. Enačbi nista enaki in nista protislovni, zato bo sistem enolično rešljiv. Če enačbi seštejemo, dobimo $2x = 4$ oziroma $x = 2$. Iz prve enačbe nato sledi, da je $y = 1$. Hitro se prepričamo, da dobljena x in y ustrezata tudi drugi enačbi. Edina rešitev je torej $x = 2$, $y = 1$.
b. Sistem ima tri enačbe in dve neznanki. Če so kakšne od enačb protislovne, potem sistem ne bo rešljiv. Če je katera od enačb kombinacija ostalih dveh, se lahko zgodi, da bo rešitev neskončno ali pa bo sistem enolično rešljiv. Ker sta prvi dve enačbi enaki kot v prejšnji točki, že vemo, da jima zadoščata $x = 2$, $y = 1$. Hitro se prepričamo, da ustrezata tudi tretji enačbi. Ta sistem je torej enolično rešljiv.
c. Sistem ima samo eno enačbo in dve neznanki, torej ne bo enolično rešljiv. Ker enačba ni protislovna, bomo dobili enoparametrično družino rešitev. Naj bo $x = t$. Iz enačbe izrazimo $y = 3 - x = 3 - t$. Rešitve so torej pari $(x, y) = (t, 3 - t)$ za vse $t \in \mathbb{R}$.
d. Sistem ima dve enačbi in dve neznanki, a opazimo, da je druga enačba večkratnik prve. Sistem ne bo enolično rešljiv, ni pa protisloven. Ko odstranimo odvečno drugo enačbo, je ekvivalenten sistemu iz prejšnje točke, torej so rešitve pari $(x, y) = (t, 3 - t)$ za vse $t \in \mathbb{R}$.
e. Sistem ima tri enačbe in dve neznanki, ampak druga in tretja enačba sta večkratnika prve in zato odveč. Rešitve so spet pari $(x, y) = (t, 3 - t)$ za vse $t \in \mathbb{R}$.
f. Sistem ima dve enačbi in dve neznanki, vendar sta enačbi očitno protislovni. Če od druge odštejemo prvo, dobimo protislovje $0 = 2$. Sistem torej nima rešitev.
g. Sistem ima tri enačbe in dve neznanki. Za prvi dve enačbi že vemo, da sta izpolnjeni pri $x = 2$, $y = 1$. Vendar pa ta rešitev ne ustreza tretji enačbi. Sistem je torej protisloven in nima rešitev.

Rešitev naloge 38. ⇧

a. Iz zadnje enačbe lahko izrazimo $z = x - 4$. Če to vstavimo v prvi dve enačbi, dobimo

$$x + y + x - 4 = 3,$$
$$2x - y + x - 4 = 9.$$

oziroma

$$2x + y = 7,$$
$$3x - y = 13.$$

Če ti enačbi seštejemo, dobimo $5x = 20$ oziroma $x = 4$. Sledi, da je $z = 0$. Iz $y = 7 - 2x$ lahko izračunamo še $y = -1$. Rešitev sistema je torej trojica $(x, y, z) = (4, -1, 0)$.

b. Če enačbi seštejemo, dobimo $3x = 12$ oziroma $x = 4$. Ko to vstavimo v prvo enačbo, dobimo še zvezo $4 + y + z = 3$ oziroma $y + z = -1$. Od tu lahko izrazimo $y = -1 - z$. Če bi $x = 4$ vstavili v drugo enačbo, bi dobili isto zvezo. Ta sistem dveh enačb s tremi neznankami ni enolično rešljiv, dobimo neskončno družino rešitev $(4, -1 - z, z)$ s parametrom $z \in \mathbb{R}$.

Rešitev naloge 39.

a. Zapišemo razširjeno matriko sistema in jo preoblikujemo z Gaussovo eliminacijo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Sistem je enolično rešljiv. Iz zadnjega stolpca lahko preberemo rešitev $(x, y, z) = (4, -1, 0)$.

b. Zapišemo razširjeno matriko sistema in jo preoblikujemo z Gaussovo eliminacijo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Iz prve vrstice dobimo $x = 4$ iz druge pa zvezo $y + z = -1$, od koder izrazimo (na primer) $y = -1 - z$. Rešitve so torej oblike $(4, -1 - z, z)$ za $z \in \mathbb{R}$.

Rešitev naloge 40.

Najprej od druge enačbe odštejemo prvo in od tretje dvakratnik prve:

$$\begin{aligned} x \;+\; 2y \;+\; & 2z \;=\; 3, \\ y \;-\; & 3z \;=\; 1, \\ -\; y \;+\; & (a-5)z \;=\; -1. \end{aligned}$$

Nazadnje pa še novi tretji enačbi prištejemo novo drugo enačbo:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 3, \\ y - 3z &= 1, \\ (a-8)z &= 0. \end{aligned}$$

Če je torej $a \neq 8$, potem iz tretje enačbe dobimo $z = 0$, iz druge $y = 1$ in nazadnje še iz prve $x = 1$. V teh primerih je sistem enolično rešljiv in rešitev je $[1, 1, 0]^\mathsf{T}$.
Če je $a = 8$, je zadnja enačba trivialna in dobimo sistem dveh enačb s tremi neznankami, ki ima enoparametrično družino rešitev. Če pišemo $z = t$, dobimo iz druge enačbe $y = 1 + 3t$ in iz prve $x = 1 - 8t$. V tem primeru so rešitve sistema $[1, 1, 0]^\mathsf{T} + t[-8, 3, 1]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 41.

Iz napisanega lahko zapišemo sistem štirih enačb s štirimi neznankami

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 4, \\ x - (y + z + w) &= 3, \\ (x + y) - (z + w) &= 2, \\ (x + y + z) - w &= 1. \end{aligned}$$

Ko odpravimo oklepaje, dobimo

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 4, \\ x - y - z - w &= 3, \\ x + y - z - w &= 2, \\ x + y + z - w &= 1. \end{aligned}$$

Preostalim trem enačbam odštejemo prvo, da se znebimo spremenljivke x, nato pa jih še pomnožimo z -1:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 4, \\ 2y + 2z + 2w &= 1, \\ 2z + 2w &= 2, \\ 2w &= 3. \end{aligned}$$

Od tu pa že lahko izračunamo odgovor. Iz zadnje enačbe dobimo $w = \frac{3}{2}$, iz tretje $z = -\frac{1}{2}$, nato iz druge $y = -\frac{1}{2}$ in nazadnje iz prve $x = \frac{7}{2}$.

Rešitev naloge 42.

Vektor $\vec{v}$ bo pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če bo veljalo $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v} = 0$. Dobimo torej sistem enačb

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{v} &= 0, \\ \vec{b} \cdot \vec{v} &= 0, \\ \vec{c} \cdot \vec{v} &= 1, \\ \vec{d} \cdot \vec{v} &= 1, \end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{aligned} 2x &+ 2y &+ 2z & & &= 0,\\ & & y &+ 3z &+ w &= 0,\\ 4x &+ 2y &+ z &- w &&= 1,\\ -2x &- y &+ 2z &+ w &&= 1. \end{aligned}$$

Če prvo enačbo delimo z 2, tretji odštejemo dvakratnik prve in četrti prištejemo prvo, dobimo

$$\begin{aligned} x &+ y &+ z & & &= 0,\\ & & y &+ 3z &+ w &= 0,\\ &- 2y &- 3z &- w &&= 1,\\ & & y &+ 4z &+ w &= 1. \end{aligned}$$

Na naslednjem koraku četrti enačbi odštejemo drugo in tretji prištejemo dvakratnik druge, pa imamo

$$\begin{aligned} x &+ y &+ z & & &= 0,\\ & & y &+ 3z &+ w &= 0,\\ & & &3z &+ w &= 1,\\ & & &z & &= 1. \end{aligned}$$

Četrta enačba pravi, da je $z = 1$. Če to vstavimo v tretjo, dobimo $w = -2$. Nato iz druge enačbe sledi, da je $y = -1$, in nazadnje iz prve enačbe izračunamo $x = 0$.
Hitro se lahko prepričamo, da je vektor $[0, -1, 1, -2]^\mathsf{T}$ res rešitev naloge.

Rešitev naloge 43. ⇧

Če od prve enačbe odštejemo zadnjo, drugi enačbi prištejemo (novo) prvo, tretji pa odštejemo dvakratnik (nove) prve, dobimo

$$\begin{aligned} x &+ y &= 1,\\ (a-1)(a+1)y & &= a+1,\\ z &= 2. \end{aligned}$$

Vidimo, da bo število rešitev odvisno od druge enačbe.

a. Če je $a = -1$, je druga enačba trivialna. Dobimo sistem dveh enačb s tremi neznankami, ki bo imel enoparametrično družino rešitev. Če vzamemo x za parameter, lahko izrazimo $y = 1 - x$ iz prve enačbe in dobimo rešitve
$$[x, 1-x, 2]^\mathsf{T}.$$
b. Če je $a = 1$, je druga enačba protislovna, ker dobimo na levi strani 0, na desni pa ne. V tem primeru sistem nima rešitev.
c. Če je $a \notin \{1, -1\}$, potem lahko drugo enačbo delimo z $a + 1$ in nato izrazimo $y = \frac{1}{a-1}$. Iz prve enačbe potem dobimo še $x = 1 - \frac{1}{a-1}$, iz zadnje pa $z = 2$, zato ima v tem primeru sistem natanko eno rešitev.

Rešitev naloge 44. ⇧

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a-2 \\ 0 & a-2 & 2 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = [1,-1,0]^\mathsf{T}$.

b. Če naredimo Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki sistema $[A|b]$ tako, da drugi vrstici prištejemo prvo, tretji vrstici prištejemo drugo in od dvakratnika tretje vrstice odštejemo a-kratnik druge, dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 4a-a^2 & 0 \end{array}\right].$$

Če je $4a - a^2 = 0$, potem dobimo sistem dveh enačb s tremi neznankami, ki ni enolično rešljiv. Za $a = 0$ imamo parameter $z = t$ in iz druge enačbe dobimo $y = t$, potem pa iz prve še $x = 1 - t$. Za $a = 4$ in parameter $z = t$ dobimo iz druge enačbe $y = -t$ in iz prve $x = 1 + t$.

c. Če je $a \notin \{0, 4\}$, potem iz tretje enačbe sledi $z = 0$, iz druge še $y = 0$ in iz prve $x = 1$, torej je rešitev sistema $[1, 0, 0]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 45.

Naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na razširjeni matriki $[A|\vec{b}]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -12 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -15 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Če pišemo $w = t$, izrazimo iz tretje enačbe $z = t$, iz druge $y = 1 - 3t$ in iz prve $x = 1 + t$. Dobimo enoparametrično družino rešitev

$$[1, 1, 0, 0]^\mathsf{T} + t[1, -3, 1, 1]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 46.

a. Na razširjeni matriki $[A|\vec{b}_1\vec{b}_2]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$A = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Vidimo, da je sistem $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$ protisloven, ker je zadnja enačba v poenostavljenem sistemu $0 = 1$. Za sistem $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$ dobimo enačbe

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_2 - x_4 &= 0, \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Hitro lahko najdemo eno rešitev, na primer $[1, 0, 1, 0, 0]^\mathsf{T}$.

b. Sistem $A\vec{x}_1 = \vec{b}_1$ nima nobene rešitve. Rešitve sistema $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2$ so oblike

$$[1 - x_4 - x_5,\ x_4,\ 1 - x_4 - x_5,\ x_4,\ x_5]^\mathsf{T},$$

kjer sta $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ parametra.

Rešitev naloge 47.

Na razširjeni matriki $[A|\vec{b}]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Rešitev je torej $[x, y, z, w]^\mathsf{T} = [0, 1, 2, 0]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 48.

Na razširjeni matriki sistema $[A|\vec{b}]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right].$$

Vidimo, da ima matrika A rang 3, zato bo družina rešitev enoparametrična. Če vzamemo x_4 za parameter, dobimo $x_3 = 4 + x_4$, $x_2 = 0$ in $x_1 = -x_4$. Rešitve so torej oblike

$$[-x_4,\ 0,\ 4 + x_4,\ x_4]^\mathsf{T}.$$

Rešitev, ki ima vsoto komponent enako 0, zadošča pogoju

$$-x_4 + 0 + 4 + x_4 + x_4 = 0,$$

torej ustreza izbiri parametra $x_4 = -4$. Iskana rešitev je $\vec{x} = [4, 0, 0, -4]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 49.

Začnimo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na razširjeni matriki $[A|\vec{b}]$:

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & u & 0 & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & u & 0 & v \\ 0 & 1-u & 1 & 1-v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & u & 0 & v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-u & 1 & 1-v \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -u & v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-u & 1 & 1-v \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -u & v \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u & 1-v \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u & 1-v \end{array}\right].$$

Če je $u = 0$ in $v = 1$, potem ima sistem enoparametrično družino rešitev

$$[1,\ x_2,\ -x_2]^\mathsf{T}.$$

Če je $u = 0$ in $v \neq 1$, potem sistem nima rešitev. Če je $u \neq 0$, potem lahko nadaljujemo z Gaussovo eliminacijo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u & 1-v \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-v}{u} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1-v}{u} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-v}{u} \end{array}\right].$$

Za $u \neq 0$ ima torej sistem eno samo rešitev, in sicer

$$\left[1,\ -\frac{1-v}{u},\ \frac{1-v}{u}\right]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 50.

a. Sistem lahko zapišemo kot $A\vec{x} = \vec{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3a^2-6 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

b. Naredimo Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki sistema:

$$\left[A \mid \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3a^2-6 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3a^2-6 & 3 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3a^2-12 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & 2 \end{array}\right].$$

Pri tem smo najprej tretji vrstici odšteli prvo in nato drugo vrstico, nazadnje pa smo jo še delili s 3. Vidimo, da sistem ne bo rešljiv, če bo $a^2 - 4 = 0$, torej pri $a = \pm 2$. V nasprotnem primeru pa lahko iz tretje enačbe izrazimo z, ga vstavimo

v drugo enačbo, da dobimo y, in nato še y vstavimo v prvo enačbo, da dobimo x, zato bo za $a \neq \pm 2$ sistem enolično rešljiv.

c. Če je $a = -\sqrt{2}$, je $a^2 - 4 = -2$ in je razširjena matrika sistema po zgornji Gaussovi eliminaciji enaka

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right],$$

pripadajoči sistem pa

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1, \\ y + 2z &= -1, \\ -2z &= 2. \end{aligned}$$

Iz tretje vrstice dobimo $z = -1$. Iz druge nato izrazimo $y = 1$. Nazadnje iz prve vrstice dobimo še $x = 1$.

d. V splošnem lahko pri $a \neq \pm 2$ izrazimo $z = \frac{2}{a^2-4}$. Če to vstavimo v drugo enačbo, dobimo

$$y = -1 - 2z = -1 - \frac{4}{a^2 - 4}.$$

Iz pogoja $-1 - \frac{4}{a^2-4} = 3$ dobimo $-\frac{4}{a^2-4} = 4$, nato $\frac{1}{a^2-4} = -1$ in nazadnje $a^2 - 4 = -1$. Od tu izrazimo $a^2 = 3$, torej je $y = 3$ pri $a = \pm\sqrt{3}$.

3. Matrike in sistemi

Rešitev naloge 51.

Dobimo

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rezultata nista enaka.

Rešitev naloge 52.

Tokrat imamo

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

in

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Produkta nista enaka. Še več, nista niti iste dimenzije: AB je matrika dimenzije 2×2, medtem ko je BA matrika dimenzije 3×3.

Rešitev naloge 53.

a. Ker je $A^{-1}A = I$, $BI = B$, $BB^{-1} = I$, $AI = A$ in množenje matrik asociativno, je

$$\begin{aligned} ABA^{-1}AB^{-1}A &= ABIB^{-1}A = \\ &= ABB^{-1}A = \\ &= AIA = \\ &= AA = \\ &= A^2. \end{aligned}$$

b. Upoštevamo, da je $A^{-1}A = I$, $IB = B$, $B^{-1}B = I$ in množenje matrik asociativno in distributivno glede na vsoto (razliko), pa dobimo

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1}ABCB^{-1} - ACB^{-1} &= B^{-1}IBCB^{-1} - ACB^{-1} = \\ &= B^{-1}BCB^{-1} - ACB^{-1} = \\ &= ICB^{-1} - ACB^{-1} = \\ &= (I - A)CB^{-1}. \end{aligned}$$

c. Kvadrat dvočlenika $(A + B)^2$ izračunamo kot produkt $(A + B)(A + B)$, pri čemer množimo vsak člen iz prvega oklepaja z vsakim členom iz drugega oklepaja brez spreminjanja vrstnega reda faktorjev. Dobimo

$$\begin{aligned} A^2 + 2AB + B^2 - (A + B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 - (A + B)(A + B) = \\ &= A^2 + 2AB + B^2 - (A^2 + AB + BA + B^2) = \\ &= 2AB - AB - BA = \\ &= AB - BA. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 54.

Enačbo najprej preuredimo:

$$\begin{aligned} 2AX + BX &= AX + A, \\ AX + BX &= A, \\ (A + B)X &= A. \end{aligned}$$

V tej obliki enačbo najlažje rešimo tako, da naredimo Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki

$$\left[\begin{array}{c|c} A + B & A \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Rešitev je torej

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je matrika $A + B$ obrnljiva, bi lahko nalogo rešili tudi tako, da bi izračunali inverz in potem dobili X kot produkt

$$X = (A + B)^{-1}A,$$

ampak ker bi tudi inverz računali s pomočjo Gaussove eliminacije, je prva pot do rešitve lažja, saj se izognemo množenju matrik.

Rešitev naloge 55.

Enačbo preuredimo:

$$\begin{aligned} AX - X &= I - B, \\ (A - I)X &= I - B. \end{aligned}$$

Zdaj jo najlažje rešimo tako, da naredimo Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki

$$\left[\begin{array}{c|c} A - I & I - B \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Rešitev je torej

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 56.

Najprej enačbo preoblikujemo:

$$\begin{aligned} AX^{\mathsf{T}} - X^{\mathsf{T}} &= I - B^{\mathsf{T}}, \\ (A - I)X^{\mathsf{T}} &= I - B^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

Od tu znamo izračunati X^{T} s pomočjo Gaussove eliminacije na razširjeni matriki

$$\left[\begin{array}{c|c} A - I & I - B^{\mathsf{T}} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -15 & -5 \end{array}\right].$$

Dobimo torej

$$X^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -9 & -15 & -5 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -9 \\ -3 & 7 & -15 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Seveda pa bi lahko že na začetku transponirali celo enačbo. Dobili bi

$$\begin{aligned} XA^{\mathsf{T}} &= X + I - B, \\ XA^{\mathsf{T}} - X &= I - B, \\ X(A^{\mathsf{T}} - I) &= I - B, \\ X &= (I - B)(A^{\mathsf{T}} - I)^{-1}. \end{aligned}$$

Ker je matrika $A^{\mathsf{T}} - I$ obrnljiva, bi tudi tako prišli do rešitve.

Rešitev naloge 57.

Najprej izračunamo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

To lahko naredimo z Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki $[A|I]$, lahko pa uporabimo formulo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Zdaj zapišemo in preoblikujemo dano enačbo:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 & x_1 \\ 3x_3 - x_4 & x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_3 & -x_4 \\ x_1 + 3x_3 & x_2 + 3x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 & x_1 - x_4 \\ x_1 + 6x_3 - x_4 & x_2 + x_3 + 3x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Dve matriki sta enaki takrat, ko sta enaki po komponentah, torej dobimo sistem štirih enačb

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 &= 6, \\ x_1 - x_4 &= 6, \\ x_1 + 6x_3 - x_4 &= 0, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 &= -6. \end{aligned}$$

Sistem prepišemo v razširjeno matriko in naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Od tu preberemo rešitev $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1$ in $x_4 = -3$ oziroma

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 58. ⇧

Najprej razmislimo, da mora biti X matrika velikosti 2×2 in zapišemo

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Nato zapišemo sistem in matrike pomnožimo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 & 2x_2 & x_1 \\ x_3 + 2x_4 & 2x_4 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 & 2x_2 + 4x_4 & x_1 + 2x_3 \\ 2x_3 + 4x_4 & 4x_4 & 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 & 2x_2 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sprva kaže, da bomo z izenačenjem istoležnih koeficientov matrik na levi in desni dobili sistem z 9 enačbami in 4 neznankami. Vendar z uporabo metode ostrega pogleda zaključimo, da so za vsako vrstico enačbe, ki ustrezajo prvemu stolpcu vsota tistih iz drugega in tretjega stolpca, zato so odveč. Preostalih 6 enačb se glasi:

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_4 &= 6, \\ x_1 + 2x_3 &= 3, \\ 4x_4 &= 4, \\ 2x_3 &= 2, \\ 2x_2 &= 2, \\ x_1 &= 1. \end{aligned}$$

Iz zadnjih štirih enačb hitro dobimo rešitev $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ in nato preverimo, da sta pri teh vrednostih izpolnjeni tudi prvi dve enačbi. Rešitev je tako

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 59. ⇧

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Iščemo 2×3 matriko X, ki reši sistem $XA = B$. Ker smo navajeni, da je matrika neznank pri reševanju sistemov na desni strani znane matrike, enakost transponirajmo. Dobimo

$$A^\mathsf{T} X^\mathsf{T} = B^\mathsf{T}.$$

Zapišemo razširjeno matriko tega sistema in naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$[A^\mathsf{T}|B^\mathsf{T}] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right].$$

Od tu preberemo

$$X^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -1 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

in nazadnje

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 8 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Zgornji sistem je enolično rešljiv, zato je to edina matrika X, ki ustreza pogojem.

Rešitev naloge 60. ⇧

a. Vidimo, da sta obe kvadratni matriki obrnljivi, zato sklepamo, da bo ena od njiju A, druga pa B, medtem ko bo C preostala 2×3 matrika. Torej

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrično enačbo $AXB = C$ najprej pomnožimo z leve z A^{-1} in dobimo

$$XB = A^{-1}C,$$

nato pa z desne z B^{-1}, da izrazimo X:

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Ko torej ugotovimo, kako so matrike poimenovane, jih moramo samo še zmnožiti, da dobimo rešitev X. Matriki lahko zmnožimo, če se število stolpcev levega faktorja ujema s številom vrstic desnega faktorja, tj. množimo lahko $m \times n$ matriko z $n \times l$ matriko. To pomeni, da mora biti na levi strani matrike C matrika dimenzije $m \times 2$, na desni pa matrika dimenzije $3 \times l$ za poljubna m in l. Z drugimi besedami,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Za nadaljevanje najprej izračunamo oba inverza:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nazadnje samo še pomnožimo

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 61. ⇧

Najprej naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na razširjeni matriki $[A|\vec{b}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Vidimo, da so rešitve oblike $[z, 1-z, z]^\mathsf{T}$. Razlike $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ so zato oblike

$$\vec{r} = [z_1 - z_2,\ 1 - z_1 - (1 - z_2),\ z_1 - z_2]^\mathsf{T} = [z_1 - z_2,\ z_2 - z_1,\ z_1 - z_2]^\mathsf{T} = [t, -t, t]^\mathsf{T},$$

torej gre za premico. Množica vektorjev, ki so pravokotni na premico $[t, -t, t]^\mathsf{T}$ je seveda ravnina z normalo $\vec{n} = [1, -1, 1]^\mathsf{T}$, torej ravnina

$$x - y + z = 0.$$

Do rešitve lahko pridemo še na en način. Ker je $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, je

$$A\vec{r} \;=\; A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \;=\; A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 \;=\; \vec{b} - \vec{b} \;=\; 0,$$

torej je množica vseh razlik kar ničelni prostor $N(A)$, množica vektorjev, ki so pravokotni nanje, pa $N(A)^\perp = C(A^\mathsf{T})$. Ker je

$$A^\mathsf{T} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

je torej iskana množica enaka

$$\mathcal{L}(\{[1, 0, -1]^\mathsf{T}, [0, 1, 1]^\mathsf{T}\}).$$

Hitro se lahko prepričamo, da gre natanko za ravnino, ki smo jo dobili zgoraj, če izračunamo vektorski produkt obeh vektorjev. Dobimo namreč ravno normalo $\vec{n}$.

Rešitev naloge 62.

Enačbo transponiramo in dobimo $(XB)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T}$ oziroma

$$B^\mathsf{T}X^\mathsf{T} = A^\mathsf{T}.$$

Zdaj pa naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na razširjeni matriki $[B^\mathsf{T}|A^\mathsf{T}]$:

$$\begin{aligned}
[B^\mathsf{T}|A^\mathsf{T}] &= \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 0 & 9 & -5 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 7 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 7 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Od tu preberemo

$$X^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 63.

Ker je matrika B očitno obrnljiva, lahko enačbo zapišemo kot sistem

$$AX = (A+B)B^{-1}$$

in jo rešimo z uporabo Gaussove eliminacije na razširjeni matriki $[A|(A+B)B^{-1}]$. Najprej izračunamo, da je

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad (A+B)B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

nato pa

$$[A|(A+B)B^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right].$$

Od tu preberemo rešitev

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Seveda bi lahko izračunali tudi A^{-1} in rešitev dobili kot

$$X = A^{-1}(A + B)B^{-1},$$

ampak za izračun inverza matrike A bi prav tako potrebovali Gaussovo eliminacijo na matriki s tremi vrsticami in šestimi stolpci, poleg tega pa bi morali izvesti še eno dodatno množenje dveh 3×3 matrik.

Rešitev naloge 64.

a. Enačbo prepišemo v

$$AXB - AX = C$$

in nato v

$$AX(B - I) = C.$$

Če sta matriki A in $B - I$ obrnljivi, lahko pomnožimo z leve z A^{-1} in z desne z $(B - I)^{-1}$, pa dobimo

$$X = A^{-1}C(B - I)^{-1}.$$

V tem primeru ima torej enačba eno samo rešitev.

b. Če na matriki A naredimo Gaussovo eliminacijo, opazimo, da je rang enak 2, torej matrika A ni obrnljiva. Matrika $B - I = 3I - I = 2I$ je obrnljiva, torej rešujemo matrično enačbo

$$AX = C(B - I)^{-1}.$$

Najprej izračunajmo desno stran. Matrika $B - I = 2I$ mora imeti toliko stolpcev kot jih ima desna stran enačbe $AX(B - I) = C$. Ker je večkratnik identične matrike, ima tudi prav toliko vrstic, torej je $B - I \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Zato je

$$C(B - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \\ 14 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \\ 14 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sistem $AX = C(B - I)^{-1}$ rešimo tako, da najprej naredimo Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki $[A|C(B - I)^{-1}]$:

$$[A|C(B - I)^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 7 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Označimo

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iščemo 3×3 matriko X s stolpci $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ in $\vec{x}_3$, ki bodo rešili enačbe $M\vec{x}_i = \vec{d}_i$ za $i = 1, 2, 3$. Pišimo $\vec{x}_i = [a_i, b_i, c_i]^\mathsf{T}$. Oglejmo si najprej sistem $M\vec{x}_1 = \vec{d}_1$:

$$\begin{aligned} a_1 - c_1 &= 1, \\ b_1 - 2c_1 &= -2. \end{aligned}$$

Rešitve so oblike $\vec{x}_1 = [1 + c_1, -2 + 2c_1, c_1]^\mathsf{T}$, kjer je $c_1 \in \mathbb{R}$ poljuben parameter. Podobno dobimo še $\vec{x}_2 = [-2 + c_2, -3 + 2c_2, c_2]^\mathsf{T}$ in $\vec{x}_3 = [1 + c_3, 2 + 2c_3, c_3]^\mathsf{T}$ za $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Matrično enačbo torej rešijo matrike

$$X = \begin{bmatrix} 1 + c_1 & -2 + c_2 & 1 + c_3 \\ -2 + 2c_1 & -3 + 2c_2 & 2 + 2c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix},$$

kjer so $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ poljubni parametri.

Rešitev naloge 65.

⇧

a. Matriki L in U sta pravilne oblike (L spodnje trikotna z enicami na diagonali in U zgornje trikotna) in velikosti, zato moramo le še preveriti, da res dobimo A, ko izračunamo produkt LU.

b. Namesto sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ zapišemo sistem $LU\vec{x} = \vec{b}$, označimo $U\vec{x} = \vec{y}$ in najprej rešimo sistem $L\vec{y} = \vec{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Iz prve vrstice takoj dobimo $y_1 = 1$, iz druge pa $y_2 = 3$. Oboje vstavimo v tretjo enačbo, $2y_1 - 2y_2 + y_3 = 2$, in izrazimo še $y_3 = 6$. Tako je $\vec{y} = [1, 3, 6]^\mathsf{T}$. Zdaj pa rešimo še drugi del problema, $U\vec{x} = \vec{y}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Iz tretje vrstice dobimo $x_3 = -3$, to vstavimo v drugo enačbo, da dobimo $x_2 = 3$, in nazadnje oboje vstavimo v prvo enačbo, da dobimo še $x_1 = -2$. Rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ je torej $\vec{x} = [-2, 3, -3]^\mathsf{T}$.

c. Inverz 3×3 matrike s pomočjo LU razcepa dobimo tako, da trikrat uporabimo zgornji postopek. Označimo neznani inverz z X in stolpce matrike X z $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ in

$\vec{x}_3$. Poleg tega naj $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$ označujejo stolpce identične matrike. Z zgornjim postopkom rešimo sisteme

$$A\vec{x}_i = \vec{e}_i.$$

Na prvem koraku rešimo sisteme $L\vec{y}_i = \vec{e}_i$ in dobimo vektorje

$$\vec{y}_1 = [1, 0, -2]^\mathsf{T}, \quad \vec{y}_2 = [0, 1, 2]^\mathsf{T}, \quad \vec{y}_3 = [0, 0, 1]^\mathsf{T},$$

na drugem koraku pa rešimo sisteme $U\vec{x}_i = \vec{y}_i$ in dobimo rešitve

$$\vec{x}_1 = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{x}_2 = [-1, 1, -1]^\mathsf{T}, \quad \vec{x}_3 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}.$$

Inverz je torej

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 66. ⇧

a. Brez težav zmnožimo

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

b. Uporabimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki C, da dobimo zgornjo trikotno matriko U:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Pri tem smo tretji vrstici odšteli štirikratnik prve in nato še drugo, zato bo v matriki

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$l_{31} = 4$ in $l_{32} = 1$, medtem ko bo $l_{21} = 0$, ker drugi vrstici nismo nič odšteli. Torej je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

c. Sistem $C\vec{x} = \vec{b}$ najprej prepišemo v obliko $LU\vec{x} = \vec{b}$, nato pa iz tega naredimo dva sistema: $L\vec{y} = \vec{b}$ in $U\vec{x} = \vec{y}$. Prvi sistem je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Iz prve enačbe dobimo $y_1 = 2$ in iz druge $y_2 = 6$. Iz tretje enačbe nato izrazimo $y_3 = 2 - 4y_1 - y_2 = -12$, zato je $\vec{y} = [2, 6, -12]^\mathsf{T}$. Drugi sistem je torej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Iz tretje enačbe dobimo $x_3 = 2$, iz druge nato $x_2 = 6 - 3x_3 = 0$ in iz prve $x_1 = 2$. Rešitev je torej $\vec{x} = [2, 0, 2]^\mathsf{T}$.

4. Determinante

Rešitev naloge 67.

Dobimo:

$$\begin{aligned} \det(A^\mathsf{T}) &= \det(A) = 2, \\ \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{2}, \\ \det(2A) &= 2^n \det(A) = 2^{n+1}, \\ \det(AB) &= \det(A)\det(B) = 2 \cdot 0 = 0, \\ \det((AB)^{-1}) &= \frac{1}{\det(AB)} = \frac{1}{0} = \text{ni definirana}, \\ \det((AC)^{-1}) &= \frac{1}{\det(AC)} = \frac{1}{\det(A)\det(C)} = \frac{1}{2 \cdot (-1)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Determinanta $\det((AB)^{-1})$ ne obstaja, ker je $\det(AB) = 0$ in bi pri računanju delili z 0.

Rešitev naloge 68.

Ker je matrika X simetrična, bo oblike

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$$

za neke neznane x, y in z. S tem smo izpolnili prvi pogoj. Ker mora X komutirati z matriko A, mora veljati

$$\begin{aligned} AX &= XA, \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 2x+y & 2y+z \\ -x & -y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x-y & x \\ 2y-z & y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dve matriki sta enaki, kadar so enake vse komponente, zato mora veljati

$$\begin{aligned} 2x+y &= 2x-y, \\ 2y+z &= x, \\ -x &= 2y-z, \\ -y &= y. \end{aligned}$$

Iz zadnje enakosti takoj dobimo $y = 0$ in s tem je izpolnjena tudi prva enakost. Iz druge potem dobimo še $x = z$ in s tem velja še tretja enakost. Torej mora biti X oblike

$$X = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}.$$

Nazadnje upoštevamo še tretji pogoj, $\det X = 4$. Ker je $\det X = x^2$, sta rešitvi $x = 2$ in $x = -2$. Edini matriki, ki ustrezata vsem trem pogojem sta torej $2I$ in $-2I$.

Rešitev naloge 69.

a. Prvo determinanto lahko izračunamo direktno. Za izračun druge in tretje naredimo najprej razvoj po prvi vrstici, nato pa drugo od obeh dobljenih determinant razvijemo še po prvem stolpcu.

$$\begin{aligned} \det(A_2) &= \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 4 = 21. \\ \det(A_3) &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\det(A_2) - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 5 \cdot 21 - 2 \cdot 10 = 85. \\ \det(A_4) &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\det(A_3) - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 5\det(A_3) - 4\det(A_2) = 5 \cdot 85 - 4 \cdot 21 = 341. \end{aligned}$$

b. Podobno kot pri izračunu $\det(A_4)$ opazimo, da velja

$$\det(A_n) = 5\det(A_{n-1}) - 4\det(A_{n-2}).$$

c. Ker bomo v indukcijski predpostavki uporabili formulo

$$\det(A_n) = 5\det(A_{n-1}) - 4\det(A_{n-2}),$$

ki $\det(A_n)$ izraža z dvema prejšnjima, moramo za bazo indukcije preveriti dve zaporedni vrednosti. Formula

$$\det(A_n) = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$$

očitno velja za $n = 2$ in $n = 3$.
Za dokaz indukcijskega koraka uporabimo rekurzivno zvezo, ki smo jo izpeljali pri prejšnji točki, in dobimo

$$\begin{aligned}
\det(A_n) &= 5\det(A_{n-1}) - 4\det(A_{n-2}) = \\
&= 5 \cdot \frac{1}{3}(4^n - 1) - 4 \cdot \frac{1}{3}(4^{n-1} - 1) = \\
&= \frac{1}{3}\left(5 \cdot 4^n - 5 - 4^n + 4\right) = \\
&= \frac{1}{3}\left(4^{n+1} - 1\right),
\end{aligned}$$

kjer smo v drugi vrstici uporabili indukcijsko predpostavko.

Najprej izračunajmo $\det A$, $\det B$ in $\det(B-A)$.

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = \\
&= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -9 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-5) = 10. \\
\det B &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= 5\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2+1) = -5. \\
\det(B-A) &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= -4\begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \\
&= 4\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (3-8) = -20.
\end{aligned}$$

Od tu brez težav dobimo še

$$\begin{aligned}
\det A^{\mathsf{T}} &= \det A = 10, \\
\det(AB) &= \det A \cdot \det B = 10 \cdot (-5) = -50, \\
\det(AB)^{-1} &= (\det(AB))^{-1} = -\frac{1}{50}, \\
\det AB^{-1} &= \det A \cdot (\det B)^{-1} = \frac{10}{-5} = -2, \\
\det(B-A)^{-1} &= (\det(B-A))^{-1} = -\frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

Rešitev naloge 71.

a. Matrika G mora po stolpcih vsebovati vektorje $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$, matrika H pa vektorje $\vec{a}-\vec{b}, \vec{b}-\vec{c}$ in $\vec{c}-\vec{a}$. Torej je

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad H = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Ker je $XG = H$, je tudi $\det X \det G = \det H$. Ampak stolpci matrike H so očitno linearno odvisni, zato je $\det H = 0$. Ker je $\det G = -4 \neq 0$, mora biti $\det X = 0$.

c. Ker je $\det G \neq 0$, je matrika G obrnljiva in lahko izrazimo $X = HG^{-1}$. Inverz matrike G izračunamo s pomočjo Gaussove eliminacije in dobimo

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Ta inverz pomnožimo z leve s H in dobimo

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 72.

a. Pišimo $\vec{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\mathsf{T}$ in $\vec{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^\mathsf{T}$. Tedaj je

$$\vec{x}\vec{y}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 & \ldots & x_2y_n \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 & \ldots & x_3y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_3 & \ldots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

in

$$I + \vec{x}\vec{y}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \ldots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & x_2y_3 & \ldots & x_2y_n \\ x_3y_1 & x_3y_2 & 1+x_3y_3 & \ldots & x_3y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_3 & \ldots & 1+x_ny_n \end{bmatrix},$$

poleg tega pa je

$$\vec{y}^\mathsf{T}\vec{x} = 0,$$

ker sta vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ pravokotna. Opazimo, da je

$$\begin{aligned}(I+\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}})(I-\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}) &= I-\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}+\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}-(\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}})(\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}) = \\ &= I-(\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}})(\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}) = \\ &= I-\vec{x}(\vec{y}^{\mathsf{T}}\vec{x})\vec{y}^{\mathsf{T}} = \\ &= I.\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je

$$\det(I+\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}})\det(I-\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}) = \det((I+\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}})(I-\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}})) = \det I = 1,$$

zato moramo zares izračunati le eno od obeh determinant, drugo pa bomo potem dobili iz te enakosti. Izračunajmo prvo. Pri tem si bomo pomagali z matriko

$$M=\begin{bmatrix}1 & -\vec{y}^{\mathsf{T}}\\ \vec{x} & I\end{bmatrix}.$$

Poskrbimo za ničle pod diagonalo v prvem stolpcu, in sicer tako, da prvemu stolpcu po vrsti odštevamo x_1-kratnik drugega, x_2-kratnik tretjega in tako dalje:

$$M=\begin{bmatrix}1 & -y_1 & -y_2 & \dots & -y_n\\ x_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1+x_1y_1+\ldots+x_ny_n & -y_1 & -y_2 & \dots & -y_n\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}.$$

Ker sta $\vec{x}$ in $\vec{y}$ pravokotna, je $x_1y_1+\ldots x_ny_n=0$, in ker je popravljena matrika zgornjetrikotna z enicami po diagonali, je $\det M=1$. Po drugi strani pa lahko matriko M popravimo tako, da odštevamo po vrsticah in dobimo

$$M=\begin{bmatrix}1 & -y_1 & -y_2 & \dots & -y_n\\ x_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_n & 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -y_1 & -y_2 & \dots & -y_n\\ 0 & 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n\\ 0 & x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2y_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n\end{bmatrix}.$$

Tokrat je dobljena matrika bločno zgornjetrikotna in spodnji blok je ravno enak $I+\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}$, zato je $1=\det M=\det(I+\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}})$.

b. Pokazali smo, da je $\det(I+\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}})=1$, potem pa je tudi

$$\det(I-\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}})=\frac{1}{\det(I+\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}})}=1.$$

Rešitev naloge 73. ⇧

Najprej izračunamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ -7 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6$$

in

$$\det(A - I) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 2(-3 + 4) = 2.$$

Od tu dobimo še

$$\det(A^{\mathsf{T}}A) = \det A^{\mathsf{T}} \cdot \det A = (\det A)^2 = 36$$

in

$$\det(A^{\mathsf{T}}(A - I)) = \det A^{\mathsf{T}} \cdot \det(A - I) = \det A \cdot \det(A - I) = -6 \cdot 2 = -12.$$

Rešitev naloge 74.

Ker je

$$\det(B^{\mathsf{T}}(B + 2I)) = \det(B^{\mathsf{T}}) \det(B + 2I) = \det B \det(B + 2I)$$

in $\det(B + 2I)^{-1} = (\det(B + 2I))^{-1}$, zadošča izračunati $\det B$ in $\det(B + 2I)$. Hitro vidimo, da je

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= 4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 4(9 - 15) = -24.$$

in

$$\det(B+2I) = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= 10 \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 \cdot 10 = 100.$$

Torej je

$$\det(B^{\mathsf{T}}(B+2I)) = -24 \cdot 100 = -2400$$

in $\det(B+2I)^{-1} = \frac{1}{100}$.

Rešitev naloge 75. ⇧

Ker je $\det(AX) = \det A \det X = \det B$, bo

$$\det X = \frac{\det B}{\det A}$$

in se lahko izognemo reševanju sistema. Ker je matrika A zgornje trikotna, je njena determinanta enaka produktu diagonalnih členov, torej $\det A = 6$. Izračunamo samo še

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 15 = 3,$$

pa dobimo

$$\det X = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Rešitev naloge 76. ⇧

Najprej izračunamo

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & t-1 & 1 \\ t-3 & 3 & t \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t-1 & 1 \\ 0 & 3-(t-1)(t-3) & 3 \\ 0 & -t & -3 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 3-(t-1)(t-3) & 3 \\ -t & -3 \end{vmatrix} = \\
&= -9+3(t-1)(t-3)+3t = \\
&= -9+3t^2-12t+9+3t = \\
&= 3t^2-9t = 3t(t-3).
\end{aligned}$$

Determinanta bo torej enaka 0 za $t = 0$ in $t = 3$.

Rešitev naloge 77.

Izračunamo

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 3 & t & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ t & t-1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & t-21 & -4 \\ 1 & 7 & 2 \\ t & t-1 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 0 & t-21 & -4 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1-6t & 2-2t \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} t-21 & -4 \\ -1-6t & 2-2t \end{vmatrix} = \\
&= -(t-21)(2-2t)+4(1+6t) = \\
&= -(2t-2t^2-42+42t)+4+24t = \\
&= 2t^2-20t+46.
\end{aligned}$$

Ker mora biti $\det A = 4$, dobimo

$$\begin{aligned}
2t^2-20t+46 &= 4, \\
2t^2-20t+42 &= 0, \\
t^2-10t+21 &= 0, \\
(t-3)(t-7) &= 0.
\end{aligned}$$

Rešitvi sta torej $t = 3$ in $t = 7$.

5. Vektorski prostori in linearne preslikave

Rešitev naloge 78.

Naj velja $(x_1, y_1) \in U$ in $(x_2, y_2) \in U$. Potem je $x_1 - 2y_1 = 0$ in $x_2 - 2y_2 = 0$. Za vsoto

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

je

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = (x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2) = 0 + 0 = 0,$$

torej je $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in U$ in smo pokazali, da je U zaprt za seštevanje.

Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$ in $(x, y) \in U$. Velja torej $x - 2y = 0$. Za produkt s skalarjem $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ velja

$$\alpha x - 2\alpha y = \alpha(x - 2y) = 0,$$

torej je $\alpha(x, y) \in U$ in sledi, da je U zaprt za množenje s skalarjem.

Ker je U zaprt za seštevanje in množenje s skalarjem, je vektorski podprostor.

Množica V ni vektorski podprostor, ker ne vsebuje ničelnega vektorja, saj $0 - 2 \cdot 0 = 0 \neq 1$.

Rešitev naloge 79.

Preslikava g ni linearna. Naj bo $\vec{x} = \vec{y} = (1, 1)$. Potem je $g(\vec{x}) = g(\vec{y}) = (1, 1)$, ampak

$$g(\vec{x} + \vec{y}) = g(2, 2) = (4, 2) \neq (2, 2) = (1, 1) + (1, 1) = g(\vec{x}) + g(\vec{y}).$$

Preslikava, ki ni aditivna, ni linearna. Namesto tega bi zadoščalo tudi, če bi pokazali, da g ni homogena, na primer za $\vec{x} = (1, 1)$ in $\alpha = 2$:

$$g(\alpha\vec{x}) = g(2, 2) = (4, 2) \neq (2, 2) = 2(1, 1) = \alpha g(\vec{x}).$$

Preslikava h ni linearna, ker $h(0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0)$, torej ne preslika ničelnega vektorja v ničelni vektor.

Preslikava f pa je linearna. Označimo $\vec{x} = (x_1, x_2)$ in $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Potem je

$$\begin{aligned} f(\vec{x} + \vec{y}) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \\ &= (x_1 + y_1, (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)) = \\ &= (x_1 + y_1, (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)) = \\ &= (x_1, x_1 - x_2) + (y_1, y_1 - y_2) = \\ &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \end{aligned}$$

zato je f aditivna. Naj bo še $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\vec{x} = (x, y)$. Ker je

$$\begin{aligned} f(\alpha\vec{x}) &= f((\alpha x, \alpha y)) = \\ &= (\alpha x, \alpha x - \alpha y) = \\ &= (\alpha x, \alpha(x - y)) = \\ &= \alpha(x, x - y) = \\ &= \alpha f(\vec{x}), \end{aligned}$$

je f homogena. Ker je f aditivna in homogena, je linearna.

Rešitev naloge 80.

a. Ker je jedro linearne preslikave vedno vektorski podprostor domene in lahko zapišemo U kot

$$\begin{aligned} U &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\vec{x} = -A^{\mathsf{T}}\vec{x}\} = \\ &= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid (A + A^{\mathsf{T}})\vec{x} = \vec{0}\} = \\ &= \ker(A + A^{\mathsf{T}}), \end{aligned}$$

je U vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$.

b. Najprej izračunamo

$$A + A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

nato pa $(A + A^\mathsf{T})\vec{a} = [0,0,0,0]^\mathsf{T}$ in $(A + A^\mathsf{T})\vec{b} = [1,-1,-1,1]^\mathsf{T}$. Vektor $\vec{a}$ leži v U, vektor $\vec{b}$ pa ne.

c. Na matriki $(A + A^\mathsf{T})$ naredimo Gaussovo eliminacijo:

$$A + A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika $A + A^\mathsf{T}$ ima torej rang 3 in $\dim \ker(A + A^\mathsf{T}) = \dim U = 1$. Če vzamemo četrto komponento za parameter in z njo izrazimo ostale tri, dobimo parametrizacijo $[-t, t, -t, t]^\mathsf{T}$. Bazo za U tako tvori na primer vektor $[1,-1,1,-1]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 81.

a. Ker je

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = B^\mathsf{T}\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - B^\mathsf{T})\vec{x} = \vec{0}\} = N(A - B^\mathsf{T})$$

ničelni prostor matrike $A - B^\mathsf{T}$, je seveda podprostor domene $\mathbb{R}^3$.

b. Poiščimo bazo za $V = N(A - B^\mathsf{T})$. Na matriki $A - B^\mathsf{T}$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$A - B^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je rang matrike 1 in $\dim N(A - B^\mathsf{T}) = 2$. Če vzamemo y in z za parametra, so vektorji v $N(A - B^\mathsf{T})$ parametrizirani kot $[2z, y, z]^\mathsf{T}$. Za bazo V izberemo vektorja $[2,0,1]^\mathsf{T}$ in $[0,1,0]^\mathsf{T}$. Matrika D bo slikala v $\mathbb{R}^3$ in najlažje bo, če vsak vektor iz baze V ustreza enemu stolpcu matrike D. Tako bo avtomatično $V = C(D)$. Ena možna rešitev je

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seveda bi lahko izbrali drugo bazo za V in bi dobili drugačno matriko D, za katero bi bil stolpični prostor še vedno enak V. Lahko bi dobili matriko z drugim vrstnim redom teh stolpcev ali pa matriko, v kateri je vsak od stolpcev večkratnik naših. Nazadnje bi lahko število stolpcev poljubno povečali, paziti bi morali le, da so vsi dodatni vektorji linearna kombinacija baznih in sta oba bazna vektorja zares prisotna.

Rešitev naloge 82. ⇧

a. Ničelni prostor dobimo tako, da naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če vzamemo x_3 in x_4 za parametra, dobimo parametrizacijo za $N(A)$ z vektorji oblike $[-x_3-x_4, -2x_3-x_4, x_3, x_4]^\mathsf{T}$. Če izberemo $x_3 = -1$ in $x_4 = 0$, dobimo vektor $\vec{v}_1 = [1, 2, -1, 0]^\mathsf{T}$, če izberemo $x_3 = 0$ in $x_4 = -1$ pa vektor $\vec{v}_2 = [1, 1, 0, -1]^\mathsf{T}$. Množica $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ je primer baze za $N(A)$. Stolpični prostor dobimo tako, da naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Baza za $C(A)$ sta torej vektorja $\vec{v}_3 = [1, 0, -1, 2]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_4 = [0, 1, 3, -2]^\mathsf{T}$.

b. Poskusimo vektor $\vec{a}$ zapisati kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$. Zanima nas torej, če obstajata koeficienta α in β, za katera je $\vec{a} = \alpha\vec{v}_3 + \beta\vec{v}_4$, oziroma po komponentah:

$$[2, 3, 7, -2]^\mathsf{T} = \alpha[1, 0, -1, 2]^\mathsf{T} + \beta[0, 1, 3, -2]^\mathsf{T}.$$

Iz enakosti prvih komponent takoj dobimo $\alpha = 2$, iz drugih pa $\beta = 3$. Vidimo, da je pri teh vrednostih α in β vrednost tretje komponente na desni strani enaka $-\alpha + 3\beta = 7$, vrednost četrte pa $2\alpha - 2\beta = -2$. S tema koeficientoma torej res vektor $\vec{a}$ zapišemo kot linearno kombinacijo $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$ ter velja $\vec{a} \in C(A)$.

Poskusimo še vektor $\vec{b}$ zapisati kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$. Zanima nas torej, če obstajata koeficienta γ in δ, za katera je $\vec{b} = \gamma\vec{v}_3 + \delta\vec{v}_4$, oziroma po komponentah:

$$[2, 0, -2, 2]^\mathsf{T} = \gamma[1, 0, -1, 2]^\mathsf{T} + \delta[0, 1, 3, -2]^\mathsf{T}.$$

Iz enakosti prvih komponent takoj dobimo $\gamma = 2$, iz drugih pa $\delta = 0$. Vidimo, da je pri teh vrednostih γ in δ vrednost tretje komponente na desni strani

enaka $-\gamma + 3\delta = -2$, kar ustreza levi strani, vrednost četrte komponente pa je $2\gamma - 2\delta = -4$ in ne 2 kot na desni. Vektorja $\vec{b}$ torej ne moremo zapisati kot linearno kombinacijo $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$, zato $\vec{b} \notin C(A)$. Ta del naloge bi lahko rešili tudi tako, da bi izračunali pravokotni projekciji vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ na $C(A)$. Vektor namreč leži v podprostoru U natanko tedaj, ko je njegova projekcija na U enaka vektorju samemu.

Rešitev naloge 83. ⇧

a. Pišimo $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}$. Potem lahko pogoj $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{x}$ zapišemo kot

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{x} = 0$$

in po komponentah

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 - x_2 = 0.$$

Vidimo, da je U ravnina z normalo $[1, -1, 0]^\mathsf{T}$, ki vsebuje izhodišče. Zato je U vektorski podprostor. Alternativno lahko rečemo, da je $U = N(M)$ za matriko

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Najprej poiščimo bazo za U. Iz matrike M lahko takoj preberemo, da so vektorji v $N(M) = U$ oblike $[x_1, x_1, x_3]^\mathsf{T}$. Za bazna vektorja lahko torej vzamemo $[1, 1, 0]^\mathsf{T}$ in $[0, 0, 1]^\mathsf{T}$. Če bo matrika A imela za stolpca ta dva vektorja, potem bo seveda $C(A) = U$, torej

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seveda bi lahko izbrali drugo bazo za U in bi dobili drugačno matriko A, za katero bi bil stolpični prostor še vedno enak U. Lahko bi dobili matriko z drugim vrstnim redom teh stolpcev ali pa matriko, v kateri je vsak od stolpcev večkratnik naših. Nazadnje bi lahko število stolpcev poljubno povečali, paziti bi morali le, da so vsi dodatni vektorji linearna kombinacija baznih in sta oba bazna vektorja zares prisotna.

Rešitev naloge 84. ⇧

a. Za $N(A)$ naredimo Gaussovo eliminacijo na matriki A po vrsticah:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je rang matrike A enak 3 in bo zato $\dim N(A) = 1$. Če vzamemo četrto komponento za parameter, dobimo za vektorje v $N(A)$ parametrizacijo

$$[-t, t, -t, t]^\mathsf{T}.$$

Baza za $N(A)$ je na primer $\{[1, -1, 1, -1]^\mathsf{T}\}$. Za $C(A)$ naredimo Gaussovo eliminacijo na matriki A po stolpcih:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je $\dim C(A) = 3$, baza pa je na primer

$$\{[2, 0, 1, 2]^\mathsf{T}, [0, 1, 0, 1]^\mathsf{T}, [0, 0, 3, -10]^\mathsf{T}\}.$$

b. Sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ najlažje rešimo tako, da na razširjeni matriki $[A|\vec{b}]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vidimo, da so rešitve oblike

$$[1 - t, -2 + t, 1 - t, t]^\mathsf{T}.$$

c. Med rešitvami sistema, ki so oblike $[1 - t, -2 + t, 1 - t, t]^\mathsf{T}$, iščemo tiste, za katere je skalarni produkt z vektorjem $\vec{b}$ enak 0. Veljati mora torej

$$5 \cdot (1 - t) + 0 \cdot (-2 + t) + 4 \cdot (1 - t) + 0 \cdot t = 0,$$

od koder izračunamo $t = 1$. Edina rešitev sistema, ki je pravokotna na vektor $\vec{b}$ je torej $[0, -1, 0, 1]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 85.

a. Ta del lahko hitro rešimo z geometrijskim premislekom. Ker za vektorski produkt vedno velja

$$\vec{a} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{a},$$

dobimo skupaj z zahtevo naloge

$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{a}$$

enakost $\vec{v} \times \vec{a} = -\vec{v} \times \vec{a}$ oziroma $\vec{v} \times \vec{a} = \vec{0}$. Ker je vektorski produkt enak $\vec{0}$ natanko tedaj, ko sta vektorja, ki ju množimo, kolinearna, so v V ravno tisti vektorji $\vec{v}$, ki so vzporedni vektorju $\vec{a}$. Z drugimi besedami, V je premica skozi izhodišče s smernim vektorjem $\vec{a}$. Taka premica je seveda vektorski podprostor in $\dim V = 1$.

Druga možnost je, da primerjamo levo in desno stran in poiščemo parametrizacijo za V. Iz

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo

$$\begin{bmatrix} z \\ -z \\ y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ z \\ x-y \end{bmatrix},$$

od koder sklepamo, da je $z = 0$ in $x - y = 0$. Vektorji $\vec{v} \in V$ so torej oblike $[x, x, 0]^\mathsf{T}$, zato je $V = \mathcal{L}(\{\vec{a}\})$ in $\dim V = 1$.

b. Primera matrik A in B, za katera je $V = N(A)$ in $V = C(B)$, sta

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 86. ⇧

a. Zložimo vektorje v matriko

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

in naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Torej je $\dim V = 2$, baza za V pa $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

b. Pišimo

$$\vec{v}_4 = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3$$

oziroma

$$[1, 2, 2]^\mathsf{T} = \alpha[-1, 2, 0]^\mathsf{T} + \beta[0, 2, 1]^\mathsf{T} + \gamma[-3, 2, -2]^\mathsf{T}.$$

Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} -\alpha - 3\gamma &= 1, \\ 2\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 2, \\ \beta - 2\gamma &= 2. \end{aligned}$$

Iz tretje enačbe izrazimo $\beta = 2 + 2\gamma$. Iz prve enačbe dobimo $\alpha = -1 - 3\gamma$ in druga enačba je potem avtomatično izpolnjena. To pomeni, da rešitev ni enolična, za vsako izbiro γ dobimo eno rešitev. Izberimo na primer $\gamma = 0$. Dobimo $\alpha = -1$ in $\beta = 2$, torej je

$$\vec{v}_4 = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

Rešitev naloge 87. ⇧

a. Ker je $A\vec{e} = [4,1]^\mathsf{T} \neq [3,2]^\mathsf{T} = A^\mathsf{T}\vec{e}$, matrika A ni element množice W. Ker je matrika B simetrična, je $B = B^\mathsf{T}$ in zato tudi $B\vec{e} = B^\mathsf{T}\vec{e}$. Matrika B torej je element množice W.

b. Naj bosta $X, Y \in W$ poljubni matriki in $\alpha \in \mathbb{R}$ poljuben skalar. Potem je $X\vec{e} = X^\mathsf{T}\vec{e}$ in $Y\vec{e} = Y^\mathsf{T}\vec{e}$. Ker je

$$(X+Y)\vec{e} = X\vec{e} + Y\vec{e} = X^\mathsf{T}\vec{e} + Y^\mathsf{T}\vec{e} = (X^\mathsf{T} + Y^\mathsf{T})\vec{e} = (X+Y)^\mathsf{T}\vec{e}$$

in

$$(\alpha X)\vec{e} = \alpha(X\vec{e}) = \alpha(X^\mathsf{T}\vec{e}) = (\alpha X)^\mathsf{T}\vec{e},$$

je podmnožica W zaprta za seštevanje in za množenje s skalarjem. Je torej vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

c. Zapišimo pogoj $X\vec{e} = X^\mathsf{T}\vec{e}$ v obliki $(X - X^\mathsf{T})\vec{e} = \vec{0}$. Naj bo

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$(X - X^\mathsf{T})\vec{e} = \begin{bmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-c \\ c-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

natanko tedaj, ko je $b - c = 0$ oziroma $b = c$. V W so torej matrike oblike

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix},$$

kjer so $a, b, d \in \mathbb{R}$ poljubna števila. Eno od možnih baz za W tvorijo matrike

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

torej je $\dim(W) = 3$. Matriko B lahko v tej bazi zapišemo kot

$$B = B_1 + 2B_2 - B_3.$$

Rešitev naloge 88. ⇧

a. Pišimo $\vec{x} = [x_1, x_2]^\mathsf{T}$. Potem je

$$\vec{x}^\mathsf{T}A\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2.$$

Ker je edina rešitev enačbe $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 0$ par $(x_1, x_2) = (0,0)$, je $U = \{\vec{0}\}$ in je U (trivialni) vektorski podprostor.

b. Naj bosta $X, Y \in V$ poljubni matriki in naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$ poljuben skalar. Potem je $\vec{a}^\mathsf{T} X \vec{a} = 0$ in $\vec{a}^\mathsf{T} Y \vec{a} = 0$. Ker je

$$\vec{a}^\mathsf{T}(X+Y)\vec{a} = \vec{a}^\mathsf{T}(X\vec{a} + Y\vec{a}) = \vec{a}^\mathsf{T} X\vec{a} + \vec{a}^\mathsf{T} Y\vec{a} = 0 + 0 = 0,$$

je tudi $X + Y \in V$. Ker je

$$\vec{a}^\mathsf{T}(\alpha X)\vec{a} = \alpha(\vec{a}^\mathsf{T} X)\vec{a} = \alpha(\vec{a}^\mathsf{T} X\vec{a}) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

je $\alpha X \in V$. Množica V je zaprta za seštevanje in za množenje s skalarjem, zato je vektorski podprostor.

c. Ugotovili smo že, da je U trivialni vektorski podprostor, zato je $\dim(U) = 0$. Če pišemo

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

lahko izračunamo

$$\vec{a}^\mathsf{T} X\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-b \\ c-d \end{bmatrix} = a - b - c + d.$$

Iz pogoja $a - b - c + d = 0$ lahko izrazimo $d = -a + b + c$. V prostoru V so torej matrike oblike

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a+b+c \end{bmatrix},$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$ poljubna števila. Torej je $\dim(V) = 3$ in eno možno bazo prostora V sestavljajo matrike

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 89. ⇧

a. Matriko A, ki izraža preslikavo ϕ v standardni bazi, dobimo tako, da izračunamo slike standardnih baznih vektorjev $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$ ter rezultate zložimo v stolpce matrike. Lažje bo, če prej zapišemo sliko splošnega vektorja $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}$:

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^\mathsf{T}\right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (x_1 + x_3) = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ 0 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sliko $\phi(\vec{e}_1)$ dobimo tako, da v zgoraj izpeljano formulo vstavimo $x_1 = 1$ in $x_2 = x_3 = 0$. Podobno postopamo za $\phi(\vec{e}_2)$ in $\phi(\vec{e}_3)$ in dobimo

$$A = \begin{bmatrix} \phi(\vec{e}_1) & \phi(\vec{e}_2) & \phi(\vec{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Jedro preslikave ϕ oziroma njene matrike A dobimo tako, da na A izvedemo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V jedru so vektorji $\vec{x}$, ki rešijo sistem $A\vec{x} = \vec{0}$, torej taki, za katere velja $x_1 + x_3 = 0$. Ker imamo med tremi spremenljivkami samo eno vez, dobimo dvoparametrično družino rešitev tega sistema. Baza za jedro sta tako vektorja $[1, 0, -1]^\mathsf{T}$ in $[0, 1, 0]^\mathsf{T}$. Sliko preslikave ϕ oziroma njene matrike A dobimo tako, da na A izvedemo Gaussovo eliminacijo po stolpcih:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stolpci tvorijo bazo slike, torej je $\mathrm{im}(\phi)$ napeta na vektor $[1, 0, 1]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 90. ⇧

Preden začnemo odgovarjati na vprašanja, poenostavimo preslikavo ϕ:

$$\phi(\vec{x}) = \vec{a} \times (\vec{x} + \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{x} + \vec{a} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{x},$$

ker je $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ za poljuben $\vec{a}$.

a. Preverimo:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x} + \vec{y}) &= \vec{a} \times (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{a} \times \vec{x} + \vec{a} \times \vec{y} = \\ &= \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y}) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \phi(\alpha\vec{x}) &= \vec{a} \times (\alpha\vec{x}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{x}) = \\ &= \alpha\phi(\vec{x}). \end{aligned}$$

Enakosti sledijo iz lastnosti vektorskega produkta.

b. Poiščimo najprej predpis za $\phi(\vec{x})$ za splošen vektor $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}$:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \vec{a} \times \vec{x} = [1, 2, 0]^\mathsf{T} \times [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T} = \\ &= [2x_3, -x_3, x_2 - 2x_1]^\mathsf{T}. \end{aligned}$$

Slike baznih vektorjev so torej

$$\phi(\vec{e}_1) = [0, 0, -2]^\mathsf{T}, \quad \phi(\vec{e}_2) = [0, 0, 1]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \phi(\vec{e}_3) = [2, -1, 0]^\mathsf{T},$$

matrika A pa je enaka

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Jedro dobimo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da so v jedru vektorji $[x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}$, za katere je $x_3 = 0$ in $x_2 = 2x_1$, torej je baza jedra $\{[1, 2, 0]^\mathsf{T}\} = \{\vec{a}\}$. Za sliko naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih:

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Baza im ϕ je torej $\{e_3, 2e_1 - e_2\}$.

Rešitev naloge 91.

a. V matriki A vsakemu od vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ pripada stolpec, v katerega zapišemo, kako se slika tega vektorja izraža v bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, torej

$$A = \begin{bmatrix} \phi(\vec{a}) & \phi(\vec{b}) & \phi(\vec{c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Prehodna matrika P ima po stolpcih vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Inverz P^{-1} izračunamo s pomočjo Gaussove eliminacije na razširjeni matriki $[P \mid I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Torej je

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c. Za matriko S velja $S = PAP^{-1}$, torej

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d. Jedro S določimo tako, da naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rang matrike je 2 in $\dim \ker \phi = 1$, baza za jedro pa je na primer $\{[1,0,0]^\mathsf{T}\}$. Ker jedro ni enako $\{\vec{0}\}$, preslikava ϕ ni injektivna.

Rešitev naloge 92. ⇧

a. Naj bosta $A, B \in V$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\vec{a}^\mathsf{T}(A+B)\vec{a} \;=\; \vec{a}^\mathsf{T}A\vec{a} + \vec{a}^\mathsf{T}B\vec{a} \;=\; 0+0 \;=\; 0$$

in

$$\vec{a}^\mathsf{T}(\alpha A)\vec{a} \;=\; \alpha(\vec{a}^\mathsf{T}A\vec{a}) \;=\; \alpha \cdot 0 \;=\; 0.$$

Množica V je zaprta za seštevanje in za množenje s skalarjem, torej je vektorski podprostor.

b. Naj bo $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Iz

$$\vec{a}^\mathsf{T}A\vec{a} \;=\; [1,-1]\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \;=\; x-y-z+w \;=\; 0$$

sklepamo, da je

$$V = \{\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \mid w = y+z-x\}.$$

Ker imamo 4 koordinate in eno vez, je $\dim V = 3$. Eno možno bazo za V dobimo tako, da postavimo po enega od parametrov x, y, z na 1 in ostala dva na 0. Eno možno bazo V torej tvorijo matrike

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c. Naj bosta $A, B \in V$ ter $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\begin{aligned} \phi_{\vec{a}}(A+B) &= (A+B)\vec{a} = A\vec{a} + B\vec{a} = \\ &= \phi_{\vec{a}}(A) + \phi_{\vec{a}}(B), \\ \phi_{\vec{a}}(\alpha A) &= (\alpha A)\vec{a} = \alpha(A\vec{a}) = \\ &= \alpha\phi_{\vec{a}}(A), \end{aligned}$$

zato je $\phi_{\vec{a}}$ linearna.

d. Poglejmo, kam se s preslikavo $\phi_{\vec{a}}$ preslikajo bazne matrike

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

glede na standardno bazo $\vec{e}_1 = [1,0]^\mathsf{T}$, $\vec{e}_2 = [0,1]^\mathsf{T}$. Ker je

$$\begin{aligned} \phi_{\vec{a}}(B_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2, \\ \phi_{\vec{a}}(B_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \vec{e}_1 + (-1) \cdot \vec{e}_2, \\ \phi_{\vec{a}}(B_3) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2, \end{aligned}$$

je matrika za $\phi_{\vec{a}}$ iz baze $\{B_1, B_2, B_3\}$ v standarno bazo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$ enaka

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Če na matriki naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah, dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta matrika ima očitno rang 1, zato je

$$\dim \ker \phi_{\vec{a}} = \dim V - \dim \operatorname{im} \phi_{\vec{a}} = 3 - 1 = 2.$$

V jedru so matrike oblike $xB_1 + xB_2 + zB_3$. Pri $x = 1$, $z = 0$ dobimo $B_1 + B_2$, pri $x = 0$, $z = 1$ pa B_3. Torej bazo za jedro tvorita matriki

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Če na matriki preslikave $\phi_{\vec{a}}$ naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih, dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato bazo za $\operatorname{im} \phi_{\vec{a}}$ tvori vektor $[1,1]^\mathsf{T}$ in $\dim \operatorname{im} \phi_{\vec{a}} = 1$.

Rešitev naloge 93. ⇧

a. Naj bosta $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
\phi(X+Y) &= A(X+Y)-(X+Y)A = \\
&= AX+AY-XA-YA = \\
&= AX-XA+AY-YA = \\
&= \phi(X)+\phi(Y), \\
\phi(\alpha X) &= A(\alpha X)-(\alpha X)A = \\
&= \alpha(AX)-\alpha(XA) = \\
&= \alpha(AX-XA) = \\
&= \alpha\phi(X).
\end{aligned}$$

b. Pišimo

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

in poračunajmo

$$\begin{aligned}
\phi(X) &= AX-XA = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} a-2c & b-2d \\ 2a-c & 2b-d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+2b & -2a-b \\ c+2d & -2c-d \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -2b-2c & 2a+2b-2d \\ 2a-2c-2d & 2b+2c \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Slike standardne baze so torej

$$\phi(E_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi(E_2) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\phi(E_3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \phi(E_4) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

pripadajoča matrika iz baze $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ v bazo $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ pa

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Jedro dobimo tako, da na matriki preslikave naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je rang matrike enak 2 in je jedro dvoparametrična družina vektorjev oblike $[z+w,-z,z,w]^\mathsf{T}$. Če izberemo $z=1$ in $w=0$, dobimo $[1,-1,1,0]^\mathsf{T}$, za $z=0$ in $w=1$ pa $[1,0,0,1]^\mathsf{T}$. Baza za jedro sta tako na primer matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za sliko naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bazo im ϕ preberemo iz stolpcev. Predstavljata jo matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 94.

a. Naj bo $X=I$ in $\alpha=2$. Potem je $\det(X)=1$ in $\varphi(X)=[2,1]^\mathsf{T}$, hkrati pa je $\det(2X)=4$ in $\varphi(2X)=[4,4]^\mathsf{T}$. Ker $\varphi(2X)\neq 2\varphi(X)$, preslikava φ ni homogena in zato ni linearna.

Naj bosta $X,Y\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ poljubni matriki in $\alpha\in\mathbb{R}$ poljuben skalar. Potem je

$$\begin{aligned}\vartheta(X+Y) &= \vartheta\left(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}\right) = \vartheta\left(\begin{bmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} \end{bmatrix}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} x_{11}+y_{11}+x_{22}+y_{22} \\ x_{21}+y_{21}+x_{12}+y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}+x_{22} \\ x_{21}+x_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{11}+y_{22} \\ y_{21}+y_{12} \end{bmatrix} = \\ &= \vartheta(X)+\vartheta(Y).\end{aligned}$$

Prav tako je

$$\begin{aligned}\vartheta(\alpha X) &= \vartheta\left(\alpha\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\right) = \vartheta\left(\begin{bmatrix} \alpha x_{11} & \alpha x_{12} \\ \alpha x_{21} & \alpha x_{22} \end{bmatrix}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha x_{11}+\alpha x_{22} \\ \alpha x_{21}+\alpha x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x_{11}+x_{22}) \\ \alpha(x_{21}+x_{12}) \end{bmatrix} = \\ &= \alpha\begin{bmatrix} x_{11}+x_{22} \\ x_{21}+x_{12} \end{bmatrix} = \alpha\vartheta(X).\end{aligned}$$

Preslikava ϑ je torej linearna.

b. Ker je $\vartheta(E_{11})=\vec{e}_1$, $\vartheta(E_{12})=\vec{e}_2$, $\vartheta(E_{21})=\vec{e}_2$ in $\vartheta(E_{22})=\vec{e}_1$, je matrika preslikave ϑ v bazah $\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ in $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ enaka

$$A_\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 95.

a. Naj bosta $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ poljubni matriki in $\alpha \in \mathbb{R}$ poljuben skalar. Potem je

$$\begin{aligned}\phi(X+Y) &= J(X+Y)-(X+Y)J = JX+JY-(XJ+YJ) = \\ &= JX-XJ+JY-YJ = \phi(X)+\phi(Y)\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\phi(\alpha X) &= J(\alpha X)-(\alpha X)J = \alpha(JX)-\alpha(XJ) = \\ &= \alpha(JX-XJ) = \alpha\phi(X),\end{aligned}$$

torej je ϕ linearna.

b. Najprej izračunajmo

$$\begin{aligned}\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a & a+b \\ 2c & c+d \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c & -a+b+d \\ -c & -c \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Če vstavimo za eno od števil a, b, c in d vrednost 1 in za ostale tri 0, dobimo

$$\begin{aligned}\phi(E_{11}) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -E_{12}, \\ \phi(E_{12}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{12}, \\ \phi(E_{21}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = E_{11}-E_{21}-E_{22}, \\ \phi(E_{22}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{12},\end{aligned}$$

torej je matrika, ki pripada preslikavi ϕ v standardni bazi, enaka

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Vidimo, da sta prvi in tretji stolpec matrike A_ϕ linearno neodvisna, drugi in četrti stolpec pa sta večkratnika prvega. Torej je rang matrike A_ϕ enak 2. Ker je $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = \mathrm{rang}(A_\phi) = 2$ in velja

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = \dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4,$$

je tudi $\dim(\ker(\phi)) = 2$.

6. Ortogonalnost

Rešitev naloge 96.

Dobimo

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\,\vec{u} = \frac{1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 1}{1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 1}\,[1,0,1]^{\mathsf{T}} = \frac{4}{2}\,[1,0,1]^{\mathsf{T}} = [2,0,2]^{\mathsf{T}}.$$

Rešitev naloge 97.

Če opazimo, da je vektor $\vec{u}$ enotski, si lahko prihranimo računanje imenovalca. Dobimo

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{a}) = (\vec{a}\cdot\vec{u})\,\vec{u} = \left(1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}\right)\vec{u} = \frac{10}{2}\,\vec{u} = 5\vec{u} = \left[\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]^{\mathsf{T}}.$$

Rešitev naloge 98.

a. Z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo dobimo

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,2,0,2]^{\mathsf{T}},\\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{0}{9}\vec{u}_1 = [2,-1,2,0]^{\mathsf{T}},\\
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{v}_3 - \frac{4}{9}\vec{u}_1 - \frac{7}{9}\vec{u}_2 = \left[0,\frac{8}{9},\frac{4}{9},-\frac{8}{9}\right]^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

Vektorje $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ in $\vec{u}_3$ še normiramo. Ker je $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 3$ in $\|\vec{u}_3\| = \frac{4}{3}$, dobimo za ortonormirano bazo $\vec{q}_i = \frac{\vec{u}_i}{\|u_i\|}$ vektorje

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3},0,\frac{2}{3}\right]^{\mathsf{T}}, \quad \vec{q}_2 = \left[\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right]^{\mathsf{T}}, \quad \vec{q}_3 = \left[0,\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right]^{\mathsf{T}}.$$

b. Naj bo $A = [\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3]$. Potem velja $V^{\perp} = C(A)^{\perp} = N(A^{\mathsf{T}})$. Bazo $V^{\perp}$ bo torej generiral vektor, ki razpenja $N(A^{\mathsf{T}})$. Vemo, da je en sam, ker iz $\dim(V) = 3$ sledi $\dim(V^{\perp}) = 1$. Ta vektor poiščemo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Jedro generira vektor $\vec{u}_4 = [-2,0,2,1]^{\mathsf{T}}$. Ko ga normiramo, dobimo

$$\vec{q}_4 = \left[-\frac{2}{3},0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]^{\mathsf{T}}.$$

c. Če označimo z $\vec{x}_i$ projekcijo vektorja $\vec{x}$ na $\vec{q}_i$, potem velja

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_4$$

in projekcija $\vec{x}$ na V je enaka

$$\text{proj}_V \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3.$$

Projekcijo na V torej najhitreje izračunamo tako, da od $\vec{x}$ odštejemo njegovo projekcijo na $V^\perp$. Najprej izračunamo

$$\vec{x}_4 = \text{proj}_{\vec{q}_4}\vec{x} = (\vec{q}_4 \cdot \vec{x})\vec{q}_4 = -\frac{1}{3}\vec{q}_4 = \left[\frac{2}{9}, 0, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\right]^\mathsf{T},$$

nato pa še

$$\text{proj}_V \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_4 = \left[\frac{7}{9}, 0, \frac{2}{9}, \frac{10}{9}\right]^\mathsf{T}.$$

Seveda pa dobimo isti rezultat, če izračunamo $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ in $\vec{x}_3$ ter jih seštejemo.

Rešitev naloge 99. ⇧

a. Z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo dobimo

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,2,2,0]^\mathsf{T},\\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 + \frac{9}{9}\vec{u}_1 = [-2,0,1,2]^\mathsf{T},\\
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{v}_3 - \frac{9}{9}\vec{u}_1 + \frac{9}{9}\vec{u}_2 = [2,-1,0,2]^\mathsf{T}.
\end{aligned}$$

Vektorje $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ in $\vec{u}_3$ še normiramo. Ker je $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = \|\vec{u}_3\| = 3$, dobimo za ortonormirano bazo $\vec{q}_i = \frac{\vec{u}_i}{\|u_i\|}$ prostora $C(A)$ vektorje

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_3 = \left[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

b. Ker je $C(A)^\perp = N(A^\mathsf{T})$, bo bazo $C(A)^\perp$ generiral vektor, ki razpenja $N(A^\mathsf{T})$. Vemo, da je en sam, ker iz $\dim(C(A)) = 3$ sledi $\dim(C(A)^\perp) = 1$. Ta vektor poiščemo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jedro generira vektor $u_4 = [0,2,-2,1]^\mathsf{T}$. Ko ga normiramo, dobimo

$$\vec{q}_4 = \left[0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

c. Poiskali bomo $\vec{x}_2$, potem pa dobili $\vec{x}_1$ iz enačbe $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Vektor $\vec{x}_2$ je projekcija vektorja $\vec{x}$ na podprostor $C(A)^\perp$, ki je generiran z vektorjem $\vec{q}_4$, zato je

$$\vec{x}_2 = \text{proj}_{\vec{q}_4}\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{q}_4)\vec{q}_4 = 6\vec{q}_4 = [0,4,-4,2]^\mathsf{T}.$$

Od tu takoj dobimo

$$\vec{x}_1 = \vec{x} - \vec{x}_2 = [1,-4,-5,-2]^\mathsf{T}.$$

Lahko pa bi $\vec{x}_1$ izračunali tudi tako, da bi sešteli projekcije vektorja $\vec{x}$ na $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ in $\vec{q}_3$. Rezultat bi bil seveda enak, le nekaj več dela bi imeli.
Razcep $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ je enoličen, ker sta $C(A)$ in $C(A)^\perp$ ortogonalna.

Rešitev naloge 100. ⇧

a. Z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo dobimo

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,1,-1,-1]^\mathsf{T},\\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{4}{4}\vec{u}_1 = [1,0,0,1]^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Ko poskušamo isto narediti še za $\vec{v}_3$, dobimo $\vec{0}$, ker je $\vec{v}_3$ linearna kombinacija vektorjev $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$. Dimenzija podprostora V je torej 2. Vektorja $\vec{u}_1$ in $\vec{u}_2$ še normiramo in dobimo vektorja $\vec{q}_1$ in $\vec{q}_2$, ki tvorita ortonormirano bazo za V:

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T}.$$

b. Ker je $\dim V = 2$, bo tudi $\dim V^\perp = 2$. Naj bo $A = [\vec{v}_1,\vec{v}_2]$. Potem je $V^\perp = C(A)^\perp = N(A^\mathsf{T})$. Bazo $V^\perp$ bosta torej generirala vektorja, ki razpenjata $N(A^\mathsf{T})$. Poiščemo ju z Gaussovo eliminacijo na A^T po vrsticah:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Vektorji v jedru imajo parametrizacijo $[-w, z+2w, z, w]^\mathsf{T}$. Bazo za jedro lahko dobimo tako, da enkrat izberemo za parametra $z = 1$ in $w = 0$, drugič pa $z = 0$ in $w = 1$. Dobimo vektorja $[0,1,1,0]^\mathsf{T}$ in $[-1,2,0,1]^\mathsf{T}$. Oba sta seveda pravokotna na V, moramo pa še poskrbeti, da bosta pravokotna tudi drug na drugega. Gram-Schmidtov postopek drugi vektor popravi v $[-1,1,-1,1]^\mathsf{T}$. Oba vektorja še normiramo. Ortonormirana baza za $V^\perp$ je torej

$$\vec{q}_3 = \left[0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]^\mathsf{T}, \vec{q}_4 = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}.$$

c. Pravokotno projekcijo vektorja $\vec{x}$ na vektor $\vec{q}_i$ dobimo po formuli

$$\mathrm{proj}_{\vec{q}_i}\vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{q}_i)\vec{q}_i.$$

V našem primeru je

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_{\vec{q}_1}\vec{x} &= 0\\ \mathrm{proj}_{\vec{q}_2}\vec{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T} = \left[\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}\\ \mathrm{proj}_{\vec{q}_3}\vec{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]^\mathsf{T} = \left[0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right]^\mathsf{T},\\ \mathrm{proj}_{\vec{q}_4}\vec{x} &= \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Projekcijo na podprostor dobimo tako, da seštejemo projekcije na vektorje, ki tvorijo bazo tega podprostora. Tako je

$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_V \vec{x} &= \operatorname{proj}_{\vec{q}_1}\vec{x} + \operatorname{proj}_{\vec{q}_2}\vec{x} = \left[\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T},\\ \operatorname{proj}_{V^\perp} \vec{x} &= \operatorname{proj}_{\vec{q}_3}\vec{x} + \operatorname{proj}_{\vec{q}_4}\vec{x} = \left[-\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Rešitev naloge 101.

a. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Očitno je $U = N(A)$ in $V = N(B)$, zato sta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^3$. Seveda pa bi zadoščalo tudi, če bi preverili, da sta zaprta za seštevanje in množenje s skalarjem.

b. Bazo za jedro preslikave običajno dobimo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah. Tokrat sta obe matriki že reducirani. Matrika A ima rang 1, zato je $\dim U = \dim N(A) = 2$. Vektorji v $N(A)$ imajo parametrizacijo $[x, 3z - 2x, z]^\mathsf{T}$. Pri $x = 1$ in $z = 0$ dobimo $\vec{u}_1 = [1, -2, 0]^\mathsf{T}$, pri $x = 0$ in $z = 1$ pa $\vec{u}_2 = [0, 3, 1]^\mathsf{T}$.
Matrika B ima rang 2, zato je $\dim V = \dim N(B) = 1$. Za bazni vektor lahko vzamemo na primer $\vec{v}_1 = [6, 3, 2]^\mathsf{T}$.

c. Ker je U dvorazsežen podprostor v $\mathbb{R}^3$, njegovo bazo najlažje dopolnimo do baze $\mathbb{R}^3$ z vektorjem, ki je enak ali vzporeden vektorskemu produktu $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$. Tako dobimo $\vec{u}_3 = [-2, -1, 3]^\mathsf{T}$.

d. Ker je $V = N(B) = C(B^\mathsf{T})^\perp$, je $V^\perp = C(B^\mathsf{T})$. Bazo za $V^\perp$ bomo torej dobili z Gaussovo eliminacijo po stolpcih iz matrike B^T:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobimo $\vec{v}_2 = [1, -2, 0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [0, 2, -3]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 102.

a. Na množici vektorjev $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ izvedemo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{a} = [1, 1, 0, 0]^\mathsf{T},\\ \vec{u}_2 &= \vec{b} - \frac{\vec{b}\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{b} - \frac{2}{2}\vec{u}_1 = [0, 0, 0, 2]^\mathsf{T}\\ \vec{u}_3 &= \vec{c} - \frac{\vec{c}\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{c}\vec{u}_2}{\vec{u}_2\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{c} - \frac{2}{2}\vec{u}_1 - \frac{16}{4}\vec{u}_2 = [1, -1, 0, 0]^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Za $\vec{u}_4$ dobimo 0, ker je $\vec{d}$ linearno odvisen od $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ in $\vec{u}_3$. Vektorje $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ še normiramo in dobimo ortonormirano bazo za U:

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_2 = [0,0,0,1]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right]^\mathsf{T}.$$

b. Koeficiente razvoja pravokotne projekcije $\mathrm{proj}_U \vec{u}$ vektorja $\vec{u}$ po ortonormirani bazi $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ dobimo tako, da izračunamo skalarne produkte

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{q}_1 &= [1,2,3,4]^\mathsf{T} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right]^\mathsf{T} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \\
\vec{u} \cdot \vec{q}_2 &= [1,2,3,4]^\mathsf{T} \cdot [0,0,0,1]^\mathsf{T} = 4, \\
\vec{u} \cdot \vec{q}_3 &= [1,2,3,4]^\mathsf{T} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right]^\mathsf{T} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Torej je

$$\mathrm{proj}_U \vec{u} = \frac{3}{\sqrt{2}}\vec{q}_1 + 4\vec{q}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{q}_3 = [1,2,0,4]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 103. ⇧

a. Najprej poiščimo tak vektor $\vec{w}$, da bo množica $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$. Ker je

$$\vec{u} \times \vec{v} = [1,-2,2]^\mathsf{T} \times [2,2,1]^\mathsf{T} = [-6,3,6]^\mathsf{T},$$

lahko vzamemo na primer $\vec{w} = [2,-1,-2]^\mathsf{T}$. Iskana projekcijska matrika bo v bazi $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ oblike

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ker slika $\vec{u} \mapsto \vec{u}$, $\vec{v} \mapsto \vec{v}$ in $\vec{w} \mapsto \vec{0}$. Poiskati moramo še prehodno matriko Q, pa bomo lahko izračunali matriko P, ki pripada projekciji v standardni bazi, kot $P = QP'Q^{-1}$. Matrika Q pove, kako se baza $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ izraža s standardno bazo, zato je

$$Q = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Njen inverz lahko dobimo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na razširjeni matriki $[Q|I]$ in je enak

$$Q^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Seveda bi se lahko prej potrudili in na bazi izvedli Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo (vektorje bi bilo potrebno le še normirati), pa bi lahko na tem mestu

namesto inverza uporabili kar transponirano matriko, saj za ortogonalne matrike velja $Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}$. Nazadnje matrike še zmnožimo:

$$P = QP'Q^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

V pravilnost rešitve se lahko prepričamo tako, da izračunamo $P(\vec{u})$, $P(\vec{v})$ in $P(\vec{w})$. Prva dva se morata preslikati vase, tretji pa v $\vec{0}$.
Z manj dela enak rezultat dobimo, če vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ normiramo (pravokotna sta že), zapišemo matriko

$$Q' = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

in izračunamo P kot $P = Q'Q'^{\mathsf{T}}$.

b. $$P\vec{x} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

c. Poiskati moramo števili α in β, za kateri bo $P\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Zapisano po komponentah:

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 11, \\ -2\alpha + 2\beta &= 8, \\ 2\alpha + \beta &= 7, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $\alpha = 1, \beta = 5$, zato je $P\vec{x} = \vec{u} + 5\vec{v}$.
Hitreje lahko ta del naloge rešimo, če se spomnimo formule za projekcijo vektorja. Koeficiente lahko izračunamo kot

$$\alpha = \frac{(P\vec{x}) \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} = 1 \quad \text{in} \quad \beta = \frac{(P\vec{x}) \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = 5.$$

Rešitev naloge 104. ⇧

a. Točke iz V so zapisane z dvema parametroma, zato je $\dim V = 2$ in moramo poiskati dva bazna vektorja. Z izbiro $x = 1$ in $y = 0$ dobimo vektor $\vec{v}_1 = [1, 0, 1]^{\mathsf{T}}$, z $x = 0$ in $y = 1$ pa vektor $\vec{v}_2 = [0, 1, 1]^{\mathsf{T}}$. Množica $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ je baza za V.

b. Na $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ uporabimo Gram-Schmidtov postopek:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,0,1]^\mathsf{T},\\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = [0,1,1] - \frac{1}{2}[1,0,1]^\mathsf{T} = \left[-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Vektorja $\vec{u}_1$ in $\vec{u}_2$ moramo še normirati. Ker je $\|\vec{u}_1\| = \sqrt{2}$ in $\|\vec{u}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$, sta vektorja

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^\mathsf{T}$$

ortonormirana baza za V.

c. Koeficienta pravokotne projekcije vektorja $\vec{a}$ na prostor V sta skalarna produkta

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{q}_1 &= \sqrt{2},\\ \vec{a}\cdot\vec{q}_2 &= 0.\end{aligned}$$

Torej je

$$\mathrm{proj}_V \vec{a} = \sqrt{2}\vec{q}_1.$$

Rešitev naloge 105. ⇧

a. V pogoju prepoznamo enačbo ravnine $y - z = 0$, ki vsebuje izhodišče, zato je V vektorski podprostor. Lahko pa bi tudi opazili, da je $V = N(A)$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Ker lahko točke v V parametriziramo kot $[x, y, y]^\mathsf{T}$, lahko bazna vektorja enostavno dobimo s pravo izbiro parametrov. Za $x = 1$ in $y = 0$ dobimo $\vec{v}_1 = [1,0,0]^\mathsf{T}$, za $x = 0$ in $y = 1$ pa $\vec{v}_2 = [0,1,1]^\mathsf{T}$.

c. Če smo zgoraj prepoznali enačbo ravnine, potem vemo, da je njen ortogonalni komplement premica, ki ima za smerni vektor normalo $[0,1,-1]^\mathsf{T}$. Če nismo razmišljali geometrijsko, potem lahko vektor, ki napenja ortogonalni komplement dobimo kot vektorski produkt

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = [0,-1,1]^\mathsf{T}.$$

d. Iščemo števila α, β in γ, za katera bo

$$\vec{a} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3.$$

Dobimo jih s pomočjo projekcij na vektorje $\vec{v}_i$:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1} = \frac{2}{1} = 2,\\ \beta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2} = \frac{4}{2} = 2,\\ \gamma &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}_3}{\vec{v}_3\cdot\vec{v}_3} = \frac{2}{2} = 1.\end{aligned}$$

Hitro se lahko prepričamo, da je res

$$\vec{a} = 2[1,0,0]^\mathsf{T} + 2[0,1,1]^\mathsf{T} + [0,-1,1]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 106. ⇧

Označimo $\vec{v}_1 = [1,1,0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_2 = [1,-1,2]^\mathsf{T}$. Potem je baza stolpičnega prostora $C(A)$ enaka $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Ker sta vektorja $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ že pravokotna, lahko dobimo koeficiente razvoja projekcije $\text{proj}_{C(A)}\vec{b}$ kot

$$\begin{aligned}
\text{proj}_{\vec{v}_1}\vec{b} &= \frac{\vec{b}\cdot\vec{v}_1}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\vec{v}_1 = \frac{6}{2}\vec{v}_1 = 3\vec{v}_1,\\
\text{proj}_{\vec{v}_2}\vec{b} &= \frac{\vec{b}\cdot\vec{v}_2}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}\vec{v}_2 = \frac{6}{6}\vec{v}_2 = 1\vec{v}_2.
\end{aligned}$$

Torej je

$$\text{proj}_{C(A)}\vec{b} = 3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = [4,2,2]^\mathsf{T}.$$

Če stolpca ne bi bila pravokotna, bi morali najprej narediti še Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo.

Rešitev naloge 107. ⇧

Na množici $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ izvedemo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [2,1,2,0,0]^\mathsf{T},\\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{9}{9}\vec{u}_1 = [-1,2,0,-2,0]^\mathsf{T},\\
\vec{u}_3 &= 0\\
\vec{u}_4 &= \vec{v}_4 - \frac{\vec{v}_4\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_4\vec{u}_2}{\vec{u}_2\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{v}_4 - \frac{-9}{9}\vec{u}_1 - \frac{24}{9}\vec{u}_2 = \left[\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, 0, -\frac{5}{3}, 2\right]^\mathsf{T},\\
\vec{u}_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Vektorje še normiramo: Ker je $\|\vec{u}_1\| = 3$, $\|\vec{u}_2\| = 3$ in $\|\vec{u}_4\| = 3$, je ortonormirana baza sestavljena iz vektorjev $\vec{q}_1 = \frac{1}{3}\vec{u}_1$, $\vec{q}_2 = \frac{1}{3}\vec{u}_2$ in $\vec{q}_4 = \frac{1}{3}\vec{u}_4$ oziroma

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}, 0\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_4 = \left[\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, 0, -\frac{5}{9}, \frac{2}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 108. ⇧

a. Podprostor $C(A) \leq \mathbb{R}^4$ je linearna lupina stolpcev matrike A. Označimo $\vec{v}_1 = [1,0,0,1]^\mathsf{T}$, $\vec{v}_2 = [0,1,1,0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [1,1,0,1]^\mathsf{T}$. Na množici $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ naredimo

Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo. Najprej dobimo

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,0,0,1]^\mathsf{T},\\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{0}{2}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 = [0,1,1,0]^\mathsf{T},\\
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_2}{\vec{u}_2\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{v}_3 - \frac{2}{2}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2 =\\
&= [1,1,0,1]^\mathsf{T} - [1,0,0,1]^\mathsf{T} - \left[0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right]^\mathsf{T} = \left[0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right]^\mathsf{T}.
\end{aligned}$$

Če opazimo, da sta vektorja $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ že pravokotna, lahko seveda prva dva računa izpustimo in takoj zapišemo $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$ in $\vec{u}_2 = \vec{v}_2$ ter popravimo samo $\vec{v}_3$. Vektorje $\vec{u}_i$ še normiramo in dobimo

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_2 = \left[0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_3 = \left[0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]^\mathsf{T}.$$

Ortonormirana baza za $C(A)$ je $\{\vec{q}_1,\vec{q}_2,\vec{q}_3\}$.

b. Ker je $C(A) \leq \mathbb{R}^4$ in je $\dim C(A) = 3$, je $\dim C(A)^\perp = 1$. Iščemo vektor $\vec{q}_4 \in \mathbb{R}^4$ z normo 1, ki bo pravokoten na vektorje $\vec{q}_i$ $(i = 1,2,3)$. Hitro lahko uganemo, da bo na vse tri pravokoten vektor $\vec{u}_4 = [1,0,0,-1]^\mathsf{T}$. Ko ga še normiramo, dobimo

$$\vec{q}_4 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T}.$$

Ortonormirana baza za $C(A)^\perp$ je $\{\vec{q}_4\}$.

Rešitev naloge 109.

a. Stolpični prostor $C(A)$ je linearna lupina stolpcev matrike A. Na matriki A najprej naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih, da se znebimo tistih stolpcev, ki so linearno odvisni od ostalih. Vemo namreč, da bo tak vsaj en, saj je $C(A) \leq \mathbb{R}^3$ in torej $\dim C(A) \leq 3$. Z uporabo Gaussove eliminacije si bomo torej prihranili vsaj en korak pri Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji. Dobimo

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim\\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim\\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Podprostor $C(A)$ je torej napet na vektorja $\vec{v}_1 = [1,0,2]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_2 = [0,1,2]^\mathsf{T}$. Na množici $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ naredimo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,0,2]^\mathsf{T},\\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{4}{5}\vec{u}_1 = [0,1,2]^\mathsf{T} - \left[\frac{4}{5},0,\frac{8}{5}\right]^\mathsf{T} = \left[-\frac{4}{5},1,\frac{2}{5}\right]^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Vektorja $\vec{u}_1$ in $\vec{u}_2$ še normiramo. Ker je

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

in

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}+\frac{25}{25}+\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}},$$

je

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}},\frac{2}{3\sqrt{5}}\right]^\mathsf{T}.$$

Ortonormirana baza za $C(A)$ je $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$. Seveda bi lahko na stolpcih matrike A takoj naredili Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo in bi prav tako dobili ortonormirano bazo za $C(A)$.

b. Pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na $C(A)^\perp$ najlažje dobimo tako, da določimo vektor $\vec{u}_3$, ki napenja $C(A)^\perp$. Vemo, da bo $\vec{u}_3$ pravokoten na $\vec{u}_1$ in $\vec{u}_2$. Prvemu pogoju je lahko zadostiti. Vzamemo na primer vektor $[2,0,-1]^\mathsf{T}$ in ga popravimo tako, da bo pravokoten še na $\vec{u}_2$. Hitro vidimo, da bo vektor $[2,2,-1]^\mathsf{T}$ pravokoten tako na $\vec{u}_1$ kot na $\vec{u}_2$.
Izračunati moramo torej projekcijo vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{u}_3$. Enaka je

$$\operatorname{proj}_{\vec{u}_3}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{u}_3}{\vec{u}_3\vec{u}_3}\vec{u}_3 = \frac{18}{9}\vec{u}_3 = 2[2,2,-1]^\mathsf{T} = [4,4,-2]^\mathsf{T}.$$

c. Projekcijo na $C(A)$ bi seveda lahko dobili tako, da bi $\vec{a}$ projicirali na $\vec{u}_1$ in $\vec{u}_2$ ter rezultata sešteli, vendar je lažje, če namesto tega od $\vec{a}$ odštejemo $\operatorname{proj}_{\vec{u}_3}\vec{a}$. Dobimo

$$\operatorname{proj}_{C(A)}\vec{a} = \vec{a} - \operatorname{proj}_{\vec{u}_3}\vec{a} = [5,3,-2]^\mathsf{T} - [4,4,-2]^\mathsf{T} = [1,-1,0]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 110. ⇧

Označimo stolpce matrike A z $\vec{v}_1 = [1,1,1,1]^\mathsf{T}$, $\vec{v}_2 = [0,1,0,1]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [1,3,1,3]^\mathsf{T}$. Na množici $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ naredimo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo in dobimo

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 = [1,1,1,1]^\mathsf{T},\\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{2}{4}\vec{u}_1 = [0,1,0,1]^\mathsf{T} - \left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^\mathsf{T} = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^\mathsf{T},\\ \vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_2}{\vec{u}_2\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{v}_3 - \frac{8}{4}\vec{u}_1 - \frac{2}{1}\vec{u}_2 =\\ &= [1,3,1,3]^\mathsf{T} - [2,2,2,2]^\mathsf{T} - [-1,1,-1,1]^\mathsf{T} = [0,0,0,0]^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Vektorja $\vec{u}_1$ in $\vec{u}_2$ še normiramo, da dobimo vektorja

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T},$$

ki tvorita ortonormirano bazo $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ podprostora $C(A)$.
Na matriki A^T naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da so v $N(A^\mathsf{T})$ vektorji oblike $[x_1, x_2, -x_1, -x_2]^\mathsf{T}$. Izberemo linearno neodvisna vektorja $\vec{v}_3 = [1, 0, -1, 0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_4 = [0, 1, 0, -1]^\mathsf{T}$. Ker sta pravokotna, ju moramo le še normirati, da dobimo vektorja

$$\vec{q}_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_4 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T},$$

ki tvorita ortonormirano bazo $\{\vec{q}_3, \vec{q}_4\}$ podprostora $N(A^\mathsf{T})$. Ker je $N(A^\mathsf{T}) = C(A)^\perp$, smo z vektorjema $\vec{q}_3$ in $\vec{q}_4$ v resnici dopolnili bazo $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$ do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^4$.

Rešitev naloge 111.

a. Najprej naredimo Gaussovo eliminacijo po stolpcih na matriki A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Označimo $\vec{v}_1 = [1, 0, 0, 0]^\mathsf{T}$, $\vec{v}_2 = [0, 1, 0, 1]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [0, 0, 1, 1]^\mathsf{T}$. Vektorja $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ in $\vec{v}_2 = \vec{u}_2$ sta že pravokotna, zato z Gram-Schmidtovim postopkom popravimo le še vektor $\vec{v}_3$:

$$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{v}_3\vec{u}_2}{\vec{u}_2\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{v}_3 - \frac{0}{1}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2 = \left[0, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right]^\mathsf{T}.$$

Izračunamo še $\|\vec{u}_2\| = \sqrt{2}$ in $\|\vec{u}_3\| = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Ortonormirano bazo za $C(A)$ torej sestavljajo vektorji

$$\vec{q}_1 = [1, 0, 0, 0]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_2 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_3 = \left[0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^\mathsf{T}.$$

b. Bazo $C(A)^\perp$ bomo dobili tako, da poiščemo še vektor $\vec{q}_4$, ki $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ dopolni do baze $\mathbb{R}^4$. Najprej opazimo, da je vektor $[0, 1, 0, -1]^\mathsf{T}$ pravokoten na $\vec{q}_1$ in $\vec{q}_2$, in to bo še vedno res, če tretjo komponento poljubno spremenimo. Popravimo

jo tako, da bo dobljeni vektor pravokoten še na $\vec{q}_3$. Dobimo $\vec{u}_4 = [0,1,1,-1]^\mathsf{T}$ in zato

$$\vec{q}_4 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^\mathsf{T}.$$

Baza za $C(A)^\perp$ je $\{\vec{q}_4\}$.

c. Projekcijo $\mathrm{proj}_{C(A)}\vec{a}$ najlažje izračunamo tako, da od vektorja $\vec{a}$ odštejemo njegovo projekcijo na $C(A)^\perp$, torej

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_{C(A)}\vec{a} &= \vec{a} - (\vec{a}\vec{q}_4)\vec{q}_4 = \vec{a} - \frac{\vec{a}\vec{u}_4}{\vec{u}_4\vec{u}_4}\vec{u}_4 = \\ &= \vec{a} - \frac{6}{3}\vec{u}_4 = [5,2,4,0]^\mathsf{T} - [0,2,2,-2]^\mathsf{T} = [5,0,2,2]^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Rešitev naloge 112.

a. Označimo stolpce matrike A z

$$\vec{c}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix}-1\\2\\3\\2\end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{c}_3 = \begin{bmatrix}-4\\1\\0\\3\end{bmatrix}.$$

Na množici $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ naredimo Gram-Schmidtov postopek:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{c}_1 = [1,0,1,0]^\mathsf{T},\\ \vec{u}_2 &= \vec{c}_2 - \frac{\vec{c}_2\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 = \vec{c}_2 - \frac{2}{2}\vec{u}_1 = [-1,2,3,2]^\mathsf{T} - [1,0,1,0]^\mathsf{T} = \\ &= [-2,2,2,2]^\mathsf{T},\\ \vec{u}_3 &= \vec{c}_3 - \frac{\vec{c}_3\vec{u}_1}{\vec{u}_1\vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{c}_3\vec{u}_2}{\vec{u}_2\vec{u}_2}\vec{u}_2 = \vec{c}_3 - \frac{-4}{2}\vec{u}_1 - \frac{16}{16}\vec{u}_2 = \\ &= [-4,1,0,3]^\mathsf{T} + [2,0,2,0]^\mathsf{T} + [2,-2,-2,-2]^\mathsf{T} = [0,-1,0,1]^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Izračunamo še

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{2}, \quad \|\vec{u}_2\| = 4 \quad \text{in} \quad \|\vec{u}_3\| = \sqrt{2}.$$

Od tu dobimo ortonormirano bazo za $C(A)$:

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{q}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \text{in } \vec{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

b. Za bazo prostora $N(A^\mathsf{T})$ naredimo Gaussovo eliminacijo na vrsticah matrike A^T:

$$A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

V $N(A^\mathsf{T})$ so torej vektorji oblike $[x_4, x_4, -x_4, x_4]^\mathsf{T}$. Naj bo $\vec{u}_4 = [1, 1, -1, 1]^\mathsf{T}$. Potem je za

$$\vec{q}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

množica $\{\vec{q}_4\}$ ortonormirana baza za $N(A^\mathsf{T})$.

c. Iz enakosti $C(A)^\perp = N(A^\mathsf{T})$ razberemo, da je

$$\operatorname{proj}_{C(A)}(\vec{a}) = \vec{a} - \operatorname{proj}_{C(A)^\perp}(\vec{a}) = \vec{a} - \operatorname{proj}_{\vec{q}_4}(\vec{a}) = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{q}_4}{\vec{q}_4 \cdot \vec{q}_4} \vec{q}_4 =$$
$$= \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 113. ⇧

Najprej naredimo Gram-Schmidtov postopek na množici $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = [2, 2, 1]^\mathsf{T},$$
$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \vec{v}_2 - \frac{3}{9} \vec{u}_1 = [0, 1, 1]^\mathsf{T} - \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]^\mathsf{T} = \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

Vektor $\vec{u}_1$ še normiramo, da dobimo

$$\vec{q}_1 = \left[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

Nazadnje moramo poiskati še tak vektor $\vec{q}_3$, da bo $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}^3$. Najprej poiščemo vektor $\vec{u}_3$, ki bo pravokoten na $\vec{q}_1$ in $\vec{q}_2$. Lahko izberemo poljuben od njiju linearno neodvisen vektor in uporabimo Gram-Schmidtov postopek, lahko pa uganemo $\vec{u}_3 = [1, -2, 2]^\mathsf{T}$. Po normiranju dobimo

$$\vec{q}_3 = \left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 114.

a. Iščemo 4×2 matriko A in 2×1 vektor $\vec{b}$, za katera bo

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \vec{b}.$$

V enakost $f(x_i) = y_i$ vstavimo vse pare (x_i, y_i) iz tabele in dobimo

$$\begin{aligned} -c_1 - c_2 &= -4, \\ -\frac{c_1}{2} - 2c_2 &= -1, \\ \frac{c_1}{2} + 2c_2 &= 5, \\ c_1 + c_2 &= 2, \end{aligned}$$

torej je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b. Rešiti moramo normalni sistem

$$A^{\mathsf{T}} A\vec{x} = A^{\mathsf{T}}\vec{b}.$$

Ker je

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

je

$$A^{\mathsf{T}} A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^{\mathsf{T}}\vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Sistem $A^{\mathsf{T}} A\vec{x} = A^{\mathsf{T}}\vec{b}$ zdaj rešimo z Gaussovo eliminacijo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{5}{2} & 4 & 9 \\ 4 & 10 & 18 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Torej $c_1 = 2$ in $c_2 = 1$.

Rešitev naloge 115.

a. Če vstavimo podatke v zvezo $s(t) = vt + s_0$, dobimo:

$$\begin{aligned} v + s_0 &= 150, \\ 2v + s_0 &= 220, \\ 3v + s_0 &= 330, \\ 4v + s_0 &= 420, \end{aligned}$$

torej je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 150 \\ 220 \\ 330 \\ 420 \end{bmatrix}.$$

Rešitev po metodi najmanjših kvadratov bomo dobili, če namesto tega rešimo sistem

$$A^{\mathsf{T}} A \begin{bmatrix} v \\ s_0 \end{bmatrix} = A^{\mathsf{T}} \vec{b}.$$

Izračunamo

$$A^{\mathsf{T}} A = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^{\mathsf{T}} \vec{b} = \begin{bmatrix} 3260 \\ 1120 \end{bmatrix}$$

ter naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na razširjeni matriki $[A^{\mathsf{T}} A | A^{\mathsf{T}} \vec{b}]$:

$$\begin{aligned} [A^{\mathsf{T}} A | A^{\mathsf{T}} \vec{b}] &= \left[\begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 3260 \\ 10 & 4 & 1120 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 30 & 10 & 3260 \\ 0 & 2 & 100 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 326 \\ 0 & 2 & 100 \end{array}\right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 326 \\ 0 & 1 & 50 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 276 \\ 0 & 1 & 50 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 92 \\ 0 & 1 & 50 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Rešitev sistema je torej $[92, 50]^{\mathsf{T}}$.

b. V prejšnji točki smo izračunali, da Metka vozi s hitrostjo $v = 92\text{km/h}$, začetno stanje na števcu pa je bilo 50km.

c. Za pot velja zveza $s(t) = 92t + 50$, torej bo ob času $t = 5$ skupna pot enaka $s(5) = 92 \cdot 5 + 50 = 510$. Stanje na števcu bo 510km.

Rešitev naloge 116.

Za rešitev po metodi najmanjših kvadratov moramo izračunati

$$A^{\mathsf{T}} A = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^{\mathsf{T}} \vec{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

Ko naredimo Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki sistema $[A^{\mathsf{T}} A | A^{\mathsf{T}} \vec{b}]$, dobimo

$$\begin{aligned} [A^{\mathsf{T}} A | A^{\mathsf{T}} \vec{b}] &= \left[\begin{array}{cc|c} 18 & -9 & -9 \\ -9 & 10 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 11 & 33 \\ -9 & 10 & 21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -9 & 10 & 21 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right], \end{aligned}$$

od koder preberemo rešitev $\vec{x} = [1, 3]^{\mathsf{T}}$.

Rešitev naloge 117.

Iz podatkov dobimo predoločen sistem enačb

$$\begin{aligned} 9a + 3b + c &= 7, \\ a + b + c &= -1, \\ a - b + c &= 8, \\ 9a - 3b + c &= 16, \end{aligned}$$

ki ga zapišemo v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$, pri čemer je

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Reševali bomo sistem $A^\mathsf{T}A\vec{x} = A^\mathsf{T}\vec{b}$, zato izračunamo še

$$A^\mathsf{T}A = \begin{bmatrix} 164 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^\mathsf{T}\vec{b} = \begin{bmatrix} 214 \\ -36 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

Na razširjeni matriki $[A^\mathsf{T}A|A^\mathsf{T}\vec{b}]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 164 & 0 & 20 & 214 \\ 0 & 20 & 0 & -36 \\ 20 & 0 & 4 & 30 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right],$$

zato je iskana funkcija $g(x) = x^2 - \frac{9}{5}x + \frac{5}{2}$.

Rešitev naloge 118. ⇧

Če vstavimo dane pare v predpis za f dobimo predoločen sistem enačb

$$\begin{aligned} b &= -5, \\ a + b &= -2, \\ 2a + b &= 4, \\ 3a + b &= 3. \end{aligned}$$

Zapišemo ga v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo sistem $A^\mathsf{T}A\vec{x} = A^\mathsf{T}\vec{b}$, zato izračunamo

$$A^\mathsf{T}A = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^\mathsf{T}\vec{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Na razširjeni matriki $[A^\mathsf{T}A|A^\mathsf{T}\vec{b}]$ naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah in dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 15 \\ 6 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 15 \\ 0 & 10 & -45 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} \end{array}\right].$$

Rešitev je torej $a = 3$ in $b = -\frac{9}{2}$ oziroma $f(x) = 3x - \frac{9}{2}$.

Rešitev naloge 119.

a. Ko vstavimo podatke iz tabele v enačbo $f(x) = y$, dobimo predoločen sistem štirih enačb z dvema neznankama

$$\begin{aligned} 4a - \frac{b}{2} &= -4, \\ a - b &= 1, \\ a + b &= 2, \\ 4a + \frac{b}{2} &= -1. \end{aligned}$$

Sistem lahko zapišemo v obliki $A\vec{x} = \vec{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b. Za rešitev po metodi najmanjših kvadratov najprej izračunamo

$$A^\mathsf{T}A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

in

$$A^\mathsf{T}\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Z Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki $[A^\mathsf{T}A \mid A^\mathsf{T}\vec{b}]$ dobimo

$$[A^\mathsf{T}A \mid A^\mathsf{T}\vec{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 34 & 0 & -17 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Rešitev je torej $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ oziroma funkcija $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$.

7. Lastne vrednosti

Rešitev naloge 120.

Izračunamo $A\vec{x}$ in $A\vec{y}$:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1+1\cdot 2 \\ 2\cdot 1+4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5\vec{x},$$
$$A\vec{y} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2+1\cdot 1 \\ 2\cdot 2+4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Vektor $\vec{x}$ je lastni vektor matrike A z lastno vrednostjo $\lambda = 5$. Vektor $\vec{y}$ ni lastni vektor matrike A, ker $A\vec{y}$ ni večkratnik vektorja $\vec{y}$.

Rešitev naloge 121.

Izračunamo:

$$A-\alpha I = A-2I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$
$$A-\beta I = A-3I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika $A-\alpha I$ ima determinanto $\det(A-\alpha I) = 1\cdot 2 - 2\cdot 1 = 0$, zato $\alpha = 2$ je lastna vrednost matrike A. Matrika $A-\beta I$ ima determinanto $\det(A-\beta I) = 0\cdot 1 - 2\cdot 1 = -2 \neq 0$, zato $\beta = 3$ ni lastna vrednost matrike A.

Rešitev naloge 122.

Kot smo pri prejšnji nalogi, tudi tokrat izračunamo:

$$A-2I = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Naredimo še en korak Gaussove eliminacije po vrsticah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti $\alpha = 2$, so rešitve enačbe $(A-2I)\vec{x} = \vec{0}$. Iz zgornje matrike vidimo, da je enačba ekvivalentna enačbi $x + y = 0$. Izrazimo $y = -x$ in vidimo, da je lastni podprostor za $\alpha = 2$ sestavljen iz vektorjev oblike $[x, -x]^\mathsf{T}$. En lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\alpha = 2$, je na primer $\vec{x} = [1, -1]^\mathsf{T}$.

Rešitev naloge 123.

Najprej izračunamo karakteristični polinom matrike A:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -8 \\ 2 & -1-\lambda & -4 \\ 2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1-\lambda & -8 \\ 2 & 1-\lambda & -4 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -8 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-(3-\lambda)(3+\lambda)+8) = \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1).
\end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej $\lambda_{1,2} = 1$ in $\lambda_3 = -1$. Z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A - I$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & -8 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato je lastni podprostor za $\lambda_{1,2} = 1$ parametriziran z $[y + 2z, y, z]^\mathsf{T}$ in sta lastna vektorja na primer

$$\vec{v}_1 = [1, 1, 0]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{v}_2 = [2, 0, 1]^\mathsf{T}.$$

Z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A + I$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & -8 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato je lastni podprostor za $\lambda_3 = -1$ parametriziran z $[2z, z, z]^\mathsf{T}$ in je ustrezni lastni vektor na primer

$$\vec{v}_3 = [2, 1, 1]^\mathsf{T}.$$

Lastni vektorji nam dajo stolpce prehodne matrike P, matrika D pa vsebuje lastne vrednosti po diagonali, zato je

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj pa lahko izračunamo

$$\begin{aligned} A^{2020} &= (PDP^{-1})^{2020} = \\ &= PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot \ldots \cdot PDP^{-1} = \\ &= PD^{2020}P^{-1} = \\ &= PIP^{-1} = \\ &= PP^{-1} = \\ &= I. \end{aligned}$$

Ker je $D^{2020} = I$ smo se torej lahko izognili izračunu P^{-1}.

Rešitev naloge 124. ⇧

a. Najprej izračunamo karakteristični polinom matrike A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -6 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 3 & 5+\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda+2)(20 - 5\lambda + 4\lambda - \lambda^2 - 18) = \\ &= -(\lambda+2)(\lambda^2 + \lambda - 2) = -(\lambda+2)^2(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej $\lambda_{1,2} = -2$ in $\lambda_3 = 1$. Z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A + 2I$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato je lastni podprostor za $\lambda_{1,2} = -2$ parametriziran z $[x, y, x]^\mathsf{T}$. Lastna vektorja sta na primer

$$\vec{v}_1 = [1, 0, 1]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \vec{v}_2 = [0, 1, 0]^\mathsf{T}.$$

Z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A - I$ dobimo

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato je lastni podprostor za $\lambda_3 = 1$ parametriziran z $[2z, z, z]^\mathsf{T}$. Lastni vektor je na primer

$$\vec{v}_3 = [2, 1, 1]^\mathsf{T}.$$

b. Ker ima matrika A tri različne lastne vektorje, se jo da diagonalizirati. Lastni vektorji nam dajo stolpce prehodne matrike P, matrika D pa vsebuje lastne

vrednosti po diagonali, zato je

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 125. ⇧

a. Ko napravimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A + 2I$, vidimo, da je rang te matrike enak 2:

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Od tu dobimo edini lastni vektor za to lastno vrednost, $\vec{v}_1 = [1, 0, -1]^\mathsf{T}$.

b. Ker je

$$A\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

je $\vec{v}_2$ lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_2 = 2$.

c. Izračunamo karakteristični polinom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(\lambda+2)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

Vidimo, da je tretja lastna vrednost enaka drugi, $\lambda_{2,3} = 2$. Naredimo še Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A - 2I$ in dobimo

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je matrika ranga 2, zato dobimo za lastno vrednost $\lambda_{2,3} = 2$ le en lastni vektor, $\vec{v}_2$. Algebraična kratnost te lastne vrednosti je enaka 2, geometrična pa 1.

Rešitev naloge 126. ⇧

Matrika A je 3×2 matrika, ki ima vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ za stolpca, zato je A^T 2×3 matrika, ki ima $\vec{u}^\mathsf{T}$ in $\vec{v}^\mathsf{T}$ za vrstici. Matrika B bo dimenzije 3×3 in

$$B = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}^\mathsf{T} \\ \vec{v}^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \vec{u}\vec{u}^\mathsf{T} + \vec{v}\vec{v}^\mathsf{T}.$$

Poglejmo, kam preslika matrika B vektor $\vec{u}$:

$$B\vec{u} = (\vec{u}\vec{u}^\mathsf{T} + \vec{v}\vec{v}^\mathsf{T})\vec{u} = (\vec{u}\vec{u}^\mathsf{T})\vec{u} + (\vec{v}\vec{v}^\mathsf{T})\vec{u} = \vec{u}(\vec{u}^\mathsf{T}\vec{u}) + \vec{v}(\vec{v}^\mathsf{T}\vec{u}) = \|\vec{u}\|^2\vec{u}.$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\vec{v}^\mathsf{T}\vec{u} = 0$, ker sta vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ pravokotna. Vidimo, da se je $\vec{u}$ preslikal v svoj večkratnik, zato je $\vec{u}$ lastni vektor matrike B za lastno vrednost $\|\vec{u}\|^2$. Na enak način bi pokazali, da je $\vec{v}$ lastni vektor matrike B za lastno vrednost $\|\vec{v}\|^2$. Za diagonalizacijo matrike B potrebujemo še en lastni vektor in pripadajočo lastno vrednost. Poglejmo, kaj se zgodi z vektorjem $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$\begin{aligned} B(\vec{u} \times \vec{v}) &= (\vec{u}\vec{u}^\mathsf{T} + \vec{v}\vec{v}^\mathsf{T})(\vec{u} \times \vec{v}) = \\ &= (\vec{u}\vec{u}^\mathsf{T})(\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{v}\vec{v}^\mathsf{T})(\vec{u} \times \vec{v}) = \\ &= \vec{u}(\vec{u}^\mathsf{T}(\vec{u} \times \vec{v})) + \vec{v}(\vec{v}^\mathsf{T}(\vec{u} \times \vec{v})) = 0. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da sta skalarna produkta $\vec{u}^\mathsf{T}(\vec{u} \times \vec{v})$ in $\vec{v}^\mathsf{T}(\vec{u} \times \vec{v})$ enaka 0, ker je vektorski produkt pravokoten na oba faktorja. To pa pomeni, da je $\vec{u} \times \vec{v}$ lastni vektor za lastno vrednost 0. Ker poznamo vse tri lastne vektorje in pripadajoče lastne vrednosti, lahko zapišemo matriki D in P, za kateri je $B = PDP^{-1}$:

$$D = \begin{bmatrix} \|\vec{u}\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|\vec{v}\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{u} \times \vec{v} \end{bmatrix}.$$

V našem primeru je $\vec{u} \times \vec{v} = [0, 1, 1]^\mathsf{T}$, $\|\vec{u}\|^2 = 1$ in $\|\vec{v}\|^2 = 2$, torej je

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo še

$$D^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

in nazadnje

$$\begin{aligned} B^{10} &= (PDP^{-1})^{10} = \\ &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) = \\ &= PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1} \dots P)D(P^{-1}P)DP^{-1} = \\ &= PD^{10}P^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 512 & -512 \\ 0 & -512 & 512 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 127. ⇧

a. Ker je matrika A spodnje trikotna, so lastne vrednosti enake diagonalnim elementom. Torej je $\lambda_{1,2} = 1$ in $\lambda_3 = 2$.

b. Matriko bomo lahko diagonalizirali, če bo obstajala baza iz lastnih vektorjev. Lastni vektorji pri različnih lastnih vrednostih bodo avtomatično linearno neodvisni, problem pa lahko povzročijo večkratne lastne vrednosti, kjer morda lastnih vektorjev ni dovolj. Zato najprej poglejmo lastni podprostor za dvojno lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 1$. Z Gaussovo eliminacijo po vrsticah matrike $A - I$ dobimo

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato so v lastnem podprostoru $N(A - I)$ vektorji oblike $[0, 0, z]^\mathsf{T}$. To pomeni, da je edini lastni vektor za to lastno vrednost (do skalarnega večkratnika natančno) $\vec{v} = [0, 0, 1]^\mathsf{T}$. Ker je algebraična kratnost te lastne vrednosti 2, geometrijska kratnost pa 1, se matrike A ne da diagonalizirati.

Rešitev naloge 128. ⇧

a. Bazo za ničelni prostor poiščemo s pomočjo Gaussove eliminacije po vrsticah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vektorji v jedru so oblike $[0, y, y]^\mathsf{T}$, zato lahko za bazni vektor vzamemo $\vec{v}_1 = [0, 1, 1]^\mathsf{T}$.

b. Bazo za stolpični prostor poiščemo s pomočjo Gaussove eliminacije po stolpcih:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bazo tvorita na primer vektorja $\vec{v}_2 = [1, 0, 0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [0, 1, -1]^\mathsf{T}$.

c. Ničelni prostor $N(A)$ je lastni podprostor za lastno vrednost 0, saj za vsak vektor $\vec{x} \in N(A)$ velja $A\vec{x} = 0 = 0 \cdot \vec{x}$. Lastni vektorji za neničelne lastne vrednosti so vsi vsebovani v $C(A)$.

d. En lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_1 = 0$ je $\vec{l}_1 = \vec{v}_1$. Ostali lastni vektorji se bodo izražali kot linearne kombinacije baznih vektorjev podprostora $C(A)$, torej

$$\vec{l} = \alpha\vec{v}_2 + \beta\vec{v}_3.$$

Ker je lastni vektor določen samo do skalarnega večkratnika natančno, lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da je $\beta = 1$. Hitro lahko preverimo, da je

$$A\vec{v}_2 = [1, 1, -1]^\mathsf{T} = \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \quad \text{in} \quad A\vec{v}_3 = [2, 0, 0]^\mathsf{T} = 2\vec{v}_2.$$

To pa pomeni, da je

$$\begin{aligned} A\vec{l} &= A(\alpha\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \\ &= \alpha A\vec{v}_2 + A\vec{v}_3 = \\ &= \alpha(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) + 2\vec{v}_2 = \\ &= (\alpha + 2)\vec{v}_2 + \alpha\vec{v}_3. \end{aligned}$$

Če pa je $\vec{l}$ lastni vektor matrike A, mora poleg tega veljati še

$$A\vec{l} = k\vec{l} = (k\alpha)\vec{v}_2 + k\vec{v}_3.$$

Dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \alpha + 2 &= k\alpha, \\ \alpha &= k, \end{aligned}$$

in po hitri eliminaciji druge enačbe zvezo

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

z rešitvama $\alpha_1 = -1$ in $\alpha_2 = 2$.

V prvem primeru dobimo lastni vektor

$$\vec{l}_2 = -\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = [-1, 1, -1]^\mathsf{T},$$

v drugem primeru pa

$$\vec{l}_3 = 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = [2, 1, -1]^\mathsf{T}.$$

Pripadajoči vrednosti sta enaki koeficientu $k = \alpha$, zato je $\lambda_2 = -1$ in $\lambda_3 = 2$.

Rešitev naloge 129. ⇧

a. Bazo za ničelni prostor dobimo tako, da naredimo na matriki A Gaussovo eliminacijo po vrsticah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da so v $N(A)$ vektorji oblike $[x, y, -y, -x]^\mathsf{T}$. S primerno izbiro parametrov dobimo linearno neodvisna vektorja $[1, 0, 0, -1]^\mathsf{T}$ in $[0, 1, -1, 0]^\mathsf{T}$, ki sta že pravokotna. Zato ju samo še normiramo in smo za $N(A)$ dobili ortonormirano bazo $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, pri čemer je

$$\vec{v}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{v}_2 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^\mathsf{T}.$$

b. Bazo za stolpični prostor dobimo tako, da naredimo na matriki A Gaussovo eliminacijo po stolpcih:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da sta v $C(A)$ linearno neodvisna vektorja $[0, 1, 1, 0]^\mathsf{T}$ in $[1, 0, 0, 1]^\mathsf{T}$, ki sta tudi že pravokotna. Zato ju samo še normiramo in smo za $C(A)$ dobili

ortonormirano bazo $\{\vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, pri čemer je

$$\vec{v}_3 = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{v}_4 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^\mathsf{T}.$$

c. Hitro se prepričamo, da je

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Torej $A^2 = 2A$. Naj bo $\vec{v}$ poljuben lastni vektor matrike A. Potem velja $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ za nek λ. Izračunajmo $A^2\vec{v}$ na dva načina. Po eni strani je

$$A^2\vec{v} \;=\; A(A\vec{v}) \;=\; A(\lambda\vec{v}) \;=\; \lambda(A\vec{v}) \;=\; \lambda^2\vec{v},$$

po drugi pa

$$A^2\vec{v} \;=\; 2A\vec{v} \;=\; 2\lambda\vec{v}.$$

Od tod sklepamo, da je $2\lambda = \lambda^2$ oziroma $\lambda(\lambda-2) = 0$. Edini možni lastni vrednosti sta torej 0 in 2. Lastni podprostor za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 0$ že poznamo, saj je kar enak $N(A)$, $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ pa sta pripadajoča lastna vektorja.
Pri računanju matrike A^2 pa smo opazili, da je $A\vec{v}_3 = 2\vec{v}_3$, ko smo množili prvi stolpec desne matrike z vrsticami leve matrike. Podobno smo pri množenju drugega stolpca desne matrike z vrsticami leve matrike opazili, da je $A\vec{v}_4 = 2\vec{v}_4$. Preostala dva lastna vektorja sta torej $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$ in pripadata lastni vrednosti $\lambda_{3,4} = 2$.

d. Ker vektorji $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_4$ že tvorijo ortonormirano bazo, samo še zapišemo

$$D = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 130.

a. Najprej izračunamo karakteristični polinom matrike A:

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1+\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1+\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1+\lambda)(3-\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(3-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Pri tem smo najprej od druge vrstice odšteli prvo, iz druge vrstice izpostavili $(1+\lambda)$, prvemu stolpcu prišteli drugega, naredili razvoj po prvem stolpcu in nazadnje upoštevali, da je determinanta spodnje trikotne matrike produkt diagonalnih elementov.
Vidimo, da sta lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = 3$ in $\lambda_3 = -1$. Najprej si oglejmo lastni podprostor za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 3$. Ker je

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

imamo samo en lastni vektor, $\vec{v}_1 = [1,1,0]^\mathsf{T}$. Matrike A torej ne moremo diagonalizirati.
Za lastno vrednost $\lambda_3 = -1$ dobimo

$$A + I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

torej je pripadajoči lastni vektor $\vec{v}_2 = [1,-1,-2]^\mathsf{T}$.

b. Ker je $\vec{v}_1 = [1,1,0]^\mathsf{T}$ lastni vektor za lastno vrednost 3, velja $A\vec{v}_1 = 3\vec{v}_1$ oziroma $\|A\vec{v}_1\| = 3\|\vec{v}_1\| \geq 2\|\vec{v}_1\|$. Za iskani vektor $\vec{x}$ lahko torej vzamemo $\vec{x} = \vec{v}_1$.

Rešitev naloge 131. ⇧

a. Najprej poiščemo karakteristični polinom matrike A:

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 3\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 10 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 10 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda - 10) = \\ &= -\lambda(\lambda+2)(\lambda-5). \end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ in $\lambda_3 = 5$. Za lastne podprostore poiščemo ničelne prostore matrik

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A+2I &= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A-5I &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vidimo, da so lastni vektorji $\vec{v}_1 = [0,3,-1]^\mathsf{T}$, $\vec{v}_2 = [-2,1,3]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [5,1,3]^\mathsf{T}$.

b. Matrika D bo diagonalna z lastnimi vrednostmi na diagonali, matrika P pa bo vsebovala lastne vektorje v vrstnem redu, ki se ujema z vrstnim redom lastnih vrednosti v D, torej

$$D = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -2 & \\ & & 5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

c. Če želimo namesto matrike P iz prejšnje točke ortogonalno matriko Q, moramo samo še normirati lastne vektorje, matrika D pa lahko ostane nespremenjena. Lastni vektorji so namreč že pravokotni. Ker je

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_1\| &= \sqrt{0^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}, \\ \|\vec{v}_2\| &= \sqrt{(-2)^2+1^2+3^2} = \sqrt{14}, \\ \|\vec{v}_3\| &= \sqrt{5^2+1^2+3^2} = \sqrt{35}, \end{aligned}$$

morajo biti stolpci matrike Q enaki

$$\vec{q}_1 = \left[0, \frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_2 = \left[-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right]^\mathsf{T}, \quad \vec{q}_3 = \left[\frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}\right]^\mathsf{T}.$$

Rešitev naloge 132. ⇧

Karakteristični polinom matrike A je enak

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2,$$

zato so lastne vrednosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = 1$. Ker je

$$A + I = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A - I = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

je lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_1 = -1$ enak $\vec{v}_1 = [1, 1, -1]^\mathsf{T}$. V lastnem podprostoru za $\lambda_{2,3} = 1$ so vektorji oblike $[-y + z, y, z]^\mathsf{T}$, kjer sta $y, z \in \mathbb{R}$ poljubna parametra. Če izberemo $y = 0$ in $z = 1$, dobimo $\vec{v}_2 = [1, 0, 1]^\mathsf{T}$, pri $y = 1$ in $z = 0$ pa $\vec{v}_3 = [-1, 1, 0]^\mathsf{T}$. Seveda bi lahko izbrali tudi kakšno drugo kombinacijo parametrov in bi dobili drugačna lastna vektorja. Pomembno je le, da parametra izberemo tako, da sta dobljena lastna vektorja linearno neodvisna.
Matriko A lahko torej zapišemo kot $A = PDP^{-1}$, kjer je

$$D = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iščemo še $p(A) = A^{2018} - A^2 + 2A$. Najprej izračunajmo

$$A^{2018} = PD^{2018}P^{-1} = PP^{-1} = I \quad \text{in} \quad A^2 = PD^2P^{-1} = PP^{-1} = I.$$

Torej je

$$p(A) = I - I + 2A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Rešitev naloge 133. ⇧

Karakteristični polinom matrike A je enak

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 1),$$

zato so lastne vrednosti matrike A enake $\lambda_{1,2} = -2$ in $\lambda_3 = 1$. Ker je

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A - I = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

imamo za $\lambda_{1,2} = -2$ lastni vektor $\vec{v}_1 = [0,1,1]^\mathsf{T}$, za $\lambda_3 = 1$ pa lastni vektor $\vec{v}_2 = [2,1,2]^\mathsf{T}$. Ker pri dvakratni lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = -2$ nimamo dveh linearno neodvisnih lastnih vektorjev, se matrike A ne da diagonalizirati. Taka matrika P torej ne obstaja.

Rešitev naloge 134. ⇧

a. Karakteristični polinom matrike A je

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\
&= (1-\lambda)\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}\right) = \\
&= (1-\lambda)\,(1-\lambda+(1-\lambda)(-\lambda(1-\lambda)-1)) = \\
&= (1-\lambda)^2(\lambda^2-\lambda) = \lambda(1-\lambda)^2(\lambda-1) = \lambda(\lambda-1)^3.
\end{aligned}$$

Lastne vrednosti matrike A so torej $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_{2,3,4} = 1$. Z Gaussovo eliminacijo na matriki A dobimo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato so v lastnem podprostoru pri lastni vrednosti $\lambda_1 = 0$ vektorji oblike

$$[-x_4, -3x_4, 2x_4, x_4]^\mathsf{T}.$$

Naj bo $\vec{v}_1 = [-1,-3,2,1]^\mathsf{T}$. Z Gaussovo eliminacijo na matriki $A - I$ dobimo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

od koder iz ranga takoj razberemo, da imamo pri lastni vrednosti $\lambda_{2,3,4} = 1$ le dva linearno neodvisna lastna vektorja. Vektorji v lastnem podprostoru za lastno vrednost 1 so oblike

$$[0, x_2, x_4, x_4]^\mathsf{T}.$$

Naj bo $\vec{v}_2 = [0,1,0,0]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_3 = [0,0,1,1]^\mathsf{T}$.

b. Ker ima matrika A pri trojni lastni vrednosti $\lambda_{2,3,4} = 1$ samo dva linearno neodvisna lastna vektorja, ni diagonalizabilna.

Rešitev naloge 135. ⇧

a. Ker je

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2\vec{v},$$

je $\vec{v}$ lastni vektor matrike A pri lastni vrednosti $\lambda = -2$.

b. Ker je $\vec{v}$ lastni vektor, lahko izračunamo

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= -2\vec{v}, \\ A^2\vec{v} &= A(A\vec{v}) = A(-2\vec{v}) = -2A\vec{v} = (-2)^2\vec{v} = 4\vec{v}, \\ A^3\vec{v} &= A(A^2\vec{v}) = A(4\vec{v}) = 4A\vec{v} = 4(-2)\vec{v} = -8\vec{v}. \end{aligned}$$

Torej je

$$(A^3 + A^2 + A)\vec{v} = -8\vec{v} + 4\vec{v} - 2\vec{v} = -6\vec{v} = [-6, 6, -6, 6]^{\mathsf{T}}.$$

c. Izračunamo

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 2+\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 1 & 2 & -\lambda & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -\lambda & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2-\lambda & -\lambda & 2 \\ -2 & -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)^2(12 - 8\lambda + \lambda^2 + 4) = \\ &= (\lambda+2)^2(\lambda-4)^2. \end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej $\lambda_{1,2} = -2$ in $\lambda_{3,4} = 4$.

d. Naredimo Gaussovo eliminacijo na matriki $A - 4I$ in dobimo

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je rang matrike $A - 4I$ enak 3, zato imamo pri lastni vrednosti $\lambda_{3,4} = 4$ le en lastni vektor. Sledi, da matrika A ni diagonalizabilna.

Rešitev naloge 136. ⇧

a. Naj bo $\vec{v}$ lastni vektor za Z pri lastni vrednosti λ. Potem je $Z\vec{v} = \lambda\vec{v}$ in je

$$\vec{v} = I\vec{v} = Z^2\vec{v} = Z(Z\vec{v}) = Z(\lambda\vec{v}) = \lambda(Z\vec{v}) = \lambda(\lambda\vec{v}) = \lambda^2\vec{v}.$$

Ker je $\vec{v}$ lastni vektor, je $\vec{v} \neq \vec{0}$, zato mora biti $\lambda^2 = 1$ oziroma $\lambda = \pm 1$.

b. Naj bo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ standardna baza za $\mathbb{R}^2$. Potem je $z_1(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$ in $z_1(\vec{e}_2) = \vec{e}_1$, torej je

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podobno je $z_2(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1$ in $z_2(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$, zato je

$$Z_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c. Izračunajmo karakteristična polinoma

$$\det(Z_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

in

$$\det(Z_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda - 1)(1 - \lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Vsaka ima torej eno lastno vrednost 1 in eno -1. Poiščimo za vsako še pripadajoča lastna podprostora:

$$\begin{aligned} Z_1 - I &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ Z_1 + I &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ Z_2 - I &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ Z_2 + I &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vidimo, da je lastni vektor za Z_1 pri $\lambda_1 = 1$ enak $\vec{v}_1 = [1, 1]^\mathsf{T}$, pri $\lambda_2 = -1$ pa $\vec{v}_2 = [-1, 1]^\mathsf{T}$. Podobno je lastni vektor za Z_2 pri $\lambda_1 = 1$ enak $\vec{u}_1 = [0, 1]^\mathsf{T}$, pri $\lambda_2 = -1$ pa $\vec{u}_2 = [1, 0]^\mathsf{T}$.

d. Ker je

$$(z_1 \circ z_2)(\vec{x}) = z_1(z_2(\vec{x})) = Z_1(Z_2\vec{x}) = (Z_1Z_2)\vec{x},$$

je $R_{12} = Z_1Z_2$. Podobno je $R_{21} = Z_2Z_1$. Torej

$$\begin{aligned} R_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ R_{21} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

e. Matrika R_{12} slika $\vec{e}_1$ v $-\vec{e}_2$ in $\vec{e}_2$ v $\vec{e}_1$. Je torej rotacija za $-\frac{\pi}{2}$ okrog izhodišča. Matrika R_{21} slika $\vec{e}_1$ v $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_2$ v $-\vec{e}_1$, zato je rotacija za $\frac{\pi}{2}$ okrog izhodišča.

f. Izračunajmo karakteristična polinoma

$$\det(R_{12} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

in

$$\det(R_{21} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Matriki R_{12} in R_{21} torej nimata realnih lastnih vrednosti in lastnih vektorjev. To je smiselno, ker rotacija v $\mathbb{R}^2$ za kot φ ne ohranja nobene smeri, če je $\varphi \neq k\pi$ (za $k \in \mathbb{Z}$).

Rešitev naloge 137.

a. Naj bo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ standardna baza za $\mathbb{R}^3$. Potem je $r_1(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$, saj se os rotacije pri rotaciji ohranja. V yz-ravnini se vektor $\vec{e}_2$ pri rotaciji za $\frac{\pi}{2}$ preslika v vektor $\vec{e}_3$, torej je $r_1(\vec{e}_2) = \vec{e}_3$. Vektor $\vec{e}_3$ se preslika v $-\vec{e}_2$, zato je $r_1(\vec{e}_3) = -\vec{e}_2$. Matrika, ki pripada preslikavi r_1 v standardni bazi, je torej enaka

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podobno je $r_2(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$, v xy-ravnini pa se vektor $\vec{e}_1$ pri rotaciji za $\frac{\pi}{2}$ preslika v $\vec{e}_2$, vektor $\vec{e}_2$ pa v $-\vec{e}_1$. Pripadajoča matrika je torej

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Kot pri prejšnji nalogi razmislimo, da je $R_{12} = R_1 R_2$ in $R_{21} = R_2 R_1$. Torej

$$R_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in

$$R_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. Os rotacije bo lastni podprostor za lastno vrednost 1, torej moramo poiskati $N(R_{12} - I)$ in $N(R_{21} - I)$. Z Gaussovo eliminacijo dobimo

$$R_{12} - I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_{21} - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor za R_{12} pri lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ je torej enak $\vec{v}_1 = [1, -1, 1]^\mathsf{T}$. Lastni vektor za R_{21} pri lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ je enak $\vec{u}_1 = [1, 1, 1]^\mathsf{T}$. Os rotacije $r_1 \circ r_2$ je torej

$$\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

os rotacije $r_2 \circ r_1$ pa

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

d. Vemo, da mora biti ena lastna vrednost matrik R_{12} in R_{21} enaka 1, ker os rotacije pri rotaciji miruje. Ostali dve lastni vrednosti sta kompleksni, če kot rotacije φ ni oblike $k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$. S krajšim računom se lahko prepričamo, da sta oblike $\cos\varphi + i \sin\varphi$. Izračunajmo oba karakteristična polinoma:

$$\det(R_{12} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1),$$

$$\det(R_{21} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1).$$

Ničli kvadratne enačbe $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ sta

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

torej je $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ in $\sin\varphi = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Oba kompozituma sta torej rotaciji za $\pm 120°$. Predznaka s tem postopkom ne moremo določiti, ker je odvisen od izbire orientacije osi. Poskusimo drugače. Izberimo poljuben vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, ki je pravokoten na lastni vektor $\vec{v}_1$ in poglejmo, kakšen kot oklepa s sliko $(r_1 \circ r_2)(\vec{x})$. Naj bo, na primer, $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Potem je $(r_1 \circ r_2)(\vec{x}) = (R_{12})(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_3 - \vec{e}_1$ in velja

$$\vec{x} \cdot (r_1 \circ r_2)(\vec{x}) = [1, 1, 0]^\mathsf{T} \cdot [-1, 0, 1]^\mathsf{T} = -1,$$

poleg tega pa še $\|\vec{x}\| = \sqrt{2} = \|(r_1 \circ r_2)(\vec{x})\|$. Torej je

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x} \cdot (r_1 \circ r_2)(\vec{x})}{\|\vec{x}\| \cdot \|(r_1 \circ r_2)(\vec{x})\|} = -\frac{1}{2},$$

od koder seveda spet sledi, da je $\varphi = \pm 120°$. Če izračunamo še vektorski produkt

$$\vec{x} \times (r_1 \circ r_2)(\vec{x}) = [1, 1, 0]^\mathsf{T} \times [-1, 0, 1]^\mathsf{T} = [1, -1, 1]^\mathsf{T} = \vec{v}_1,$$

vidimo, da vektor $\vec{v}_1$, vektor $\vec{x}$ in njegova slika $(r_1 \circ r_2)(\vec{x})$ tvorijo pozitivno orientirano bazo $\mathbb{R}^3$, zato je kot rotacije R_{12} z osjo, orientirano v smeri vektorja $\vec{v}_1$, enak $+120°$. V drugem primeru vzemimo na $\vec{u}_1$ pravokotni vektor $\vec{y} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, ki se z R_{21} preslika v $(r_2 \circ r_1)(\vec{y}) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Tokrat je vektorski produkt enak

$$\vec{y} \times (r_2 \circ r_1)(\vec{y}) = [1, -1, 0]^\mathsf{T} \times [0, 1, -1]^\mathsf{T} = [1, 1, 1]^\mathsf{T} = \vec{u}_1,$$

torej tudi $\vec{u}_1, \vec{y}$ in $(r_2 \circ r_1)(\vec{y})$ tvorijo pozitivno orientirano bazo $\mathbb{R}^3$. Sledi, da je tudi kot rotacije R_{21} okrog osi $\vec{u}_1$ enak $+120°$.

Rešitev naloge 138. ⇧

a. Naj bo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ standardna baza za $\mathbb{R}^3$. Potem je $r_1(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$, saj se os rotacije pri rotaciji ohranja. V yz-ravnini se vektor $\vec{e}_2$ pri rotaciji za $\frac{\pi}{4}$ preslika v vektor v smeri $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Ker rotacija ohranja dolžine, mora biti $\|r_1(\vec{e}_2)\| = 1$, zato je $r_1(\vec{e}_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$. Vektor $\vec{e}_3$ se preslika v smer $-\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, zato je $r_1(\vec{e}_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$. Matrika, ki pripada preslikavi r_1 v standardni bazi, je torej enaka

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Podobno je $r_2(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$, v xy-ravnini pa se vektor $\vec{e}_1$ pri rotaciji za $-\frac{\pi}{4}$ preslika v smer vektorja $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, vektor $\vec{e}_2$ pa v smer vektorja $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, zato je $r_2(\vec{e}_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$ in $r_2(\vec{e}_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$. Pripadajoča matrika je torej

$$R_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. Kot pri prejšnjih nalogah je $R_{12} = R_1 R_2$ in $R_{21} = R_2 R_1$. Torej

$$R_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

in

$$R_{21} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

c. Os rotacije bo lastni podprostor za lastno vrednost 1, torej moramo poiskati $N(R_{12}-I)$ in $N(R_{21}-I)$. Z Gaussovo eliminacijo dobimo

$$R_{12}-I = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}-1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_{21}-I = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}-1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor za R_{12} pri lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ je torej enak $\vec{v}_1 = [-1, 1-\sqrt{2}, 1]^\mathsf{T}$. Lastni vektor za R_{21} pri lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ je enak $\vec{u}_1 = [-1, \sqrt{2}-1, 1]^\mathsf{T}$. Os rotacije $r_1 \circ r_2$ je torej

$$-\vec{e}_1 + (1-\sqrt{2})\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$$

os rotacije $r_2 \circ r_1$ pa

$$-\vec{e}_1 + (\sqrt{2}-1)\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

d. Vemo, da mora biti ena lastna vrednost matrik R_{12} in R_{21} enaka 1, ker os rotacije pri rotaciji miruje. Ostali dve lastni vrednosti sta kompleksni, če kot rotacije φ ni oblike $k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$. S krajšim računom se lahko prepričamo, da sta oblike $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Če bi izračunali karakteristična polinoma R_{12} in R_{21}, bi torej iz preostalih dveh lastnih vrednosti lahko izračunali še kota obeh rotacij. Druga možnost je, da izberemo neničelni vektor, ki je pravokoten na os rotacije, in pogledamo, kakšen kot oklepa s svojo sliko.

Rešitev naloge 139. ⇧

a. Iščemo 2×2 matriko A, za katero bo veljalo, da je

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . \\ . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Iz rekurzivne zveze

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$$

preberemo koeficienta prve vrstice, v drugi pa uporabimo očitno enakost $a_{n-1} = a_{n-1}$. Tako vidimo, da je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b. Izračunamo karakteristični polinom $\det(A-\lambda I)$ za matriko A:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - 4 =$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1).$$

Lastni vrednosti sta torej $\lambda_1 = 4$ in $\lambda_2 = -1$. Lastni podprostor za lastno vrednost $\lambda_1 = 4$ dobimo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A - 4I$,

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Od tu preberemo prvi lastni vektor $\vec{v}_1 = [4,1]^\mathsf{T}$. Lastni podprostor za lastno vrednost $\lambda_2 = -1$ dobimo z Gaussovo eliminacijo po vrsticah na matriki $A + I$,

$$A + I = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Drugi lastni vektor je $\vec{v}_2 = [1,-1]^\mathsf{T}$.

c. Vsak vektor iz $\mathbb{R}^2$ lahko razvijemo po bazi iz lastnih vektorjev $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Naredimo to za $\vec{x}_1$:

$$\vec{x}_1 = [a_1, a_0]^\mathsf{T} = [7,3]^\mathsf{T} = 2 \cdot [4,1]^\mathsf{T} - 1 \cdot [1,-1]^\mathsf{T} = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Zdaj pa na obeh straneh enakosti $\vec{x}_1 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ večkrat zapored uporabimo matriko A, pri čemer upoštevamo, da je $A\vec{v}_1 = 4\vec{v}_1$ in $A\vec{v}_2 = -\vec{v}_2$. Dobimo:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= 2 \cdot \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\
\vec{x}_2 &= A\vec{x}_1 = 2 \cdot A\vec{v}_1 - A\vec{v}_2 = 2 \cdot 4\vec{v}_1 - (-1)\vec{v}_2 \\
\vec{x}_3 &= A\vec{x}_2 = 2 \cdot 4A\vec{v}_1 - (-1)A\vec{v}_2 = 2 \cdot 4^2\vec{v}_1 - (-1)^2\vec{v}_2 \\
\vec{x}_4 &= A\vec{x}_3 = 2 \cdot 4^2A\vec{v}_1 - (-1)^2A\vec{v}_2 = 2 \cdot 4^3\vec{v}_1 - (-1)^3\vec{v}_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vidimo, da je v splošnem

$$\vec{x}_n = 2 \cdot 4^{n-1}[4,1]^\mathsf{T} - (-1)^{n-1}[1,-1]^\mathsf{T}.$$

Če pogledamo prvo komponento tega vektorja, dobimo iskano eksplicitno zvezo

$$a_n = 2 \cdot 4^n + (-1)^n.$$

Rešitev naloge 140. ⇧

Naj bo $\vec{x}_n = [a_{n+1}, a_n]^\mathsf{T}$ in zapišimo rekurzivno zvezo v obliki $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrike A je enak

$$\det(A - \lambda I) = \tfrac{1}{2}(2\lambda + 1)(\lambda - 1),$$

zato sta lastni vrednosti enaki $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ in $\lambda_2 = 1$. Ker je

$$\begin{aligned}
A + \tfrac{1}{2}I &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
A - I &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

sta lastna vektorja $\vec{v}_1 = [1,-2]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_2 = [1,1]^\mathsf{T}$. Vektor $\vec{x}_0$ izrazimo kot linearno kombinacijo lastnih vektorjev. Pišimo

$$\vec{x}_0 = [1,0]^\mathsf{T} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = [\alpha+\beta, -2\alpha+\beta].$$

S primerjavo komponent hitro vidimo, da je $\alpha = \frac{1}{3}$ in $\beta = \frac{2}{3}$, zato je

$$\vec{x}_0 = \tfrac{1}{3}\vec{v}_1 + \tfrac{2}{3}\vec{v}_2.$$

Ker sta $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ lastna vektorja, je $A\vec{v}_1 = -\frac{1}{2}\vec{v}_1$ in $A\vec{v}_2 = \vec{v}_2$. Dobimo torej

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= A\vec{x}_0 = \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\vec{v}_1 + \tfrac{2}{3}\vec{v}_2,\\
\vec{x}_2 &= A\vec{x}_1 = \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2\vec{v}_1 + \tfrac{2}{3}\vec{v}_2,\\
\vec{x}_3 &= A\vec{x}_2 = \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3\vec{v}_1 + \tfrac{2}{3}\vec{v}_2,\\
&\vdots\\
\vec{x}_n &= \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\vec{v}_1 + \tfrac{2}{3}\vec{v}_2,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

torej je po komponentah

$$\vec{x}_n = [a_{n+1}, a_n]^\mathsf{T} = \left[\tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \tfrac{2}{3}\right]^\mathsf{T}.$$

Od tu dobimo

$$a_n = \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \tfrac{2}{3}.$$

Rešitev naloge 141. ⇧

Pišimo $\vec{x}_n = [a_n, b_n]^\mathsf{T}$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Potem lahko rekurzivno zvezo zapišemo v matrični obliki $\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1}$ takole:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Izračunamo karakteristični polinom matrike A, $\det(A-\lambda I) = (\lambda-2)(\lambda+1)$, ter poiščemo pripadajoča lastna vektorja $\vec{v}_1 = [2,1]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_2 = [1,2]^\mathsf{T}$. Zdaj pa premislimo, kako bo to vplivalo na izračun vektorjev $\vec{x}_n$. Očitno velja

$$\vec{x}_0 = [3,3]^\mathsf{T} = [2,1]^\mathsf{T} + [1,2]^\mathsf{T} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Potem pa je

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= A\vec{x}_0 = A(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2,\\
\vec{x}_2 &= A\vec{x}_1 = A(2\vec{v}_1-\vec{v}_2) = 2A\vec{v}_1 - A\vec{v}_2 = 4\vec{v}_1 + \vec{v}_2,\\
\vec{x}_3 &= A\vec{x}_2 = A(4\vec{v}_1+\vec{v}_2) = 8\vec{v}_1 - \vec{v}_2,\\
&\vdots\\
\vec{x}_n &= A\vec{x}_{n-1} = 2^n\vec{v}_1 + (-1)^n\vec{v}_2.
\end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \vec{x}_n = 2^n\vec{v}_1 + (-1)^n\vec{v}_2 = 2^n\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)^n\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2^n + (-1)^n \\ 2^n + 2\cdot(-1)^n \end{bmatrix},$$

oziroma

$$a_n = 2 \cdot 2^n + (-1)^n \quad \text{in} \quad b_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n.$$

Rešitev naloge 142. ⇧

a. Najprej dobimo

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 16 - 18 = -2, \\ b_1 &= 3 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 12 - 15 = -3, \end{aligned}$$

nato pa

$$\begin{aligned} a_2 &= 4 \cdot (-2) - 6 \cdot (-3) = -8 + 18 = 10, \\ b_2 &= 3 \cdot (-2) - 5 \cdot (-3) = -6 + 15 = 9. \end{aligned}$$

b. Sistem zapišemo v obliki $\vec{x}_n = A\vec{x}_{n-1}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{x}_n = [a_n, b_n]^\mathsf{T}.$$

Izračunamo karakteristični polinom matrike A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1).$$

Lastni vrednosti sta torej $\lambda_1 = -2$ in $\lambda_2 = 1$. Izračunamo še pripadajoča lastna vektorja. Pri $\lambda_1 = -2$ dobimo

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

torej je lastni vektor enak $\vec{v}_1 = [1, 1]^\mathsf{T}$. Pri $\lambda_2 = 1$ je

$$A - I = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato je $\vec{v}_2 = [2, 1]^\mathsf{T}$. Začetni pogoj zapišemo kot

$$\vec{x}_0 = [4, 3]^\mathsf{T} = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Upoštevamo, da je $A\vec{v}_1 = -2\vec{v}_1$ ter $A\vec{v}_2 = \vec{v}_2$ in izračunamo

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= A\vec{x}_0 = 2A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 = 2(-2)\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \\ \vec{x}_2 &= A\vec{x}_1 = 2(-2)A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 = 2(-2)^2\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \\ &\vdots \\ \vec{x}_n &= A\vec{x}_{n-1} = 2(-2)^n\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Če splošno formulo zapišemo po komponentah, dobimo

$$\vec{x}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = 2(-2)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-2)^n + 2 \\ 2(-2)^n + 1 \end{bmatrix},$$

torej je $a_n = 2(-2)^n + 2$.

Rešitev naloge 143. ⇧

a. Najprej dobimo

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + b_0 = 1 + 2 = 3, \\ b_1 &= a_0 - b_0 = 1 - 2 = -1, \end{aligned}$$

nato

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + b_1 = 3 + (-1) = 2, \\ b_2 &= a_1 - b_1 = 3 - (-1) = 4, \end{aligned}$$

in nazadnje

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + b_2 = 2 + 4 = 6, \\ b_3 &= a_2 - b_2 = 2 - 4 = -2. \end{aligned}$$

b. Očitno je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c. Karakteristični polinom matrike A je enak $\det(A - \lambda I) = (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$, torej sta lastni vrednosti $\lambda_1 = \sqrt{2}$ in $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. Ker je

$$\begin{aligned} A - \sqrt{2}I &= \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A + \sqrt{2}I &= \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sta lastna vektorja $\vec{v}_1 = [1,\ \sqrt{2}-1]^\mathsf{T}$ in $\vec{v}_2 = [-1,\ \sqrt{2}+1]^\mathsf{T}$ ter velja $A\vec{v}_1 = \sqrt{2}\vec{v}_1$ in $A\vec{v}_2 = -\sqrt{2}\vec{v}_2$.

d. Naj bo

$$\vec{x}_0 = [1,2]^\mathsf{T} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = [\alpha - \beta,\ \alpha(\sqrt{2}-1) + \beta(\sqrt{2}+1)]^\mathsf{T}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= 1, \\ \alpha(\sqrt{2}-1) + \beta(\sqrt{2}+1) &= 2. \end{aligned}$$

Rešitvi tega sistema sta $\alpha = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}+2\right)$ in $\beta = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}-2\right)$. Z večkratno uporabo matrike A na x_0 dobimo

$$x_n = \alpha A^n\vec{v}_1 + \beta A^n\vec{v}_2 = \alpha(\sqrt{2})^n\vec{v}_1 + \beta(-\sqrt{2})^n\vec{v}_2.$$

Od tu iz prve komponente preberemo

$$a_n = \alpha(\sqrt{2})^n - \beta(-\sqrt{2})^n,$$

iz druge pa

$$b_n = \alpha(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2})^n + \beta(\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2})^n.$$

Vstavimo še zgoraj izračunana α in β in dobimo eksplicitni formuli za a_n in b_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}+2\right)(\sqrt{2})^n - \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}-2\right)(-\sqrt{2})^n, \\ b_n &= \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}+2\right)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2})^n + \frac{1}{4}\left(3\sqrt{2}-2\right)(\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2})^n. \end{aligned}$$

Ker je $\frac{1}{4} = (\sqrt{2})^{-4}$, $(3\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1) = 4-\sqrt{2}$ in $(3\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+1) = 4+\sqrt{2}$ lahko izraza še malo polepšamo:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(3\sqrt{2}+2\right)(\sqrt{2})^{n-4} - \left(3\sqrt{2}-2\right)(-\sqrt{2})^{n-4}, \\ b_n &= (4-\sqrt{2})(\sqrt{2})^{n-4} + (4+\sqrt{2})(-\sqrt{2})^{n-4}. \end{aligned}$$

Čisto za konec izračunamo še

$$\begin{aligned} a_{2018} &= (3\sqrt{2}+2)(\sqrt{2})^{2014} - (3\sqrt{2}-2)(-\sqrt{2})^{2014} = \\ &= (3\sqrt{2}+2)\cdot 2^{1007} - (3\sqrt{2}-2)\cdot 2^{1007} = \\ &= 2^{1007}(3\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}+2) = \\ &= 2^{1007}\cdot 4 = 2^{1009}. \end{aligned}$$

Rešitev naloge 144. ⇧

Sistem zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Poiščemo lastne vrednosti matrike A. Njen karakteristični polinom je

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)+2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2),$$

zato sta lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 2$. Za vsako (realno) lastno vrednost λ_i dobimo v rešitvi člen oblike konstanta $\cdot\, e^{\lambda_i \cdot t}$, torej za neke konstante a, b, c in d velja

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^t + be^{2t}, \\ y(t) &= ce^t + de^{2t}. \end{aligned}$$

Dveh konstant se znebimo tako, da zgornja izraza za $x(t)$ in $y(t)$ odvajamo in pogledamo obe strani prvotne zveze. Ker je

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ae^t + 2be^{2t}, \\ \dot{y}(t) &= ce^t + 2de^{2t}, \end{aligned}$$

dobimo

$$\begin{aligned} ae^t + 2be^{2t} &= \dot{x}(t) = -2y(t) = -2(ce^t + de^{2t}) = \\ &= (-2c)e^t - 2de^{2t}, \\ ce^t + 2de^{2t} &= \dot{y}(t) = x(t) + 3y(t) = ae^t + be^{2t} + 3(ce^t + de^{2t}) = \\ &= (a+3c)e^t + (b+3d)e^{2t}. \end{aligned}$$

Izraza iz začetka in konca vsake verige damo na eno stran enakosti in dobimo

$$\begin{aligned}(a+2c)e^t + (2b+2d)e^{2t} &= 0,\\ (a+2c)e^t + (b+d)e^{2t} &= 0.\end{aligned}$$

Vsi koeficienti pred funkcijami morajo biti enaki 0, zato velja $a = -2c$ in $b = -d$. Splošni rešitvi tega sistema diferencialnih enačb sta torej

$$\begin{aligned}x(t) &= -2ce^t - de^{2t},\\ y(t) &= ce^t + de^{2t}.\end{aligned}$$

Ker imamo podana začetna pogoja $x(0) = 3$ in $y(0) = -2$, lahko določimo še konstanti c in d. Ko vstavimo $t = 0$ v zgornji enakosti, dobimo

$$\begin{aligned}3 &= -2c - d,\\ -2 &= c + d.\end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $c = d = -1$, zato sta iskani funkciji

$$\begin{aligned}x(t) &= 2e^t + e^{2t},\\ y(t) &= -e^t - e^{2t}.\end{aligned}$$

Literatura

[1] B. Orel, *Linearna algebra*, Založba FRI, 2015, `http://matematika.fri.uni-lj.si/LA/la1.pdf` .
[2] D. Poole, *Linear Algebra, A Modern Introduction*, Brooks/Cole, 2011.
[3] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, 2016.