

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

## TEORETIČNI IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE

16. junij 2017

(1) Na naslednja vprašanja odgovori z DA ali NE (če je trditev pravilna, na kratko utemelji zakaj, če je napačna, zapiši protiprimer).

(a) Vse obrnljive matrice tvorijo vektorski podprostor v  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

(b) Vse matrice z ničelnim prvim stolpcem tvorijo vektorski podprostor v  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .

(c) Če za kvadratni matriki  $A$  in  $B$  velja, da je  $AB = 0$ , potem je tudi  $BA = 0$ .

(d) Če je matrika  $A$  obrnljiva, je tudi matrika  $A^2$  obrnljiva.

(e) Za kvadratni matriki  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  velja  $\det(AB) = \det(BA)$ .

(f) Za kvadratno matriko  $A$  velja  $\det(A + I) = \det(A) + 1$ .

(g) Predpis  $\langle p, q \rangle = p'(0) + q'(0)$  tvori skalarni produkt na prostoru vseh polinomov stopnje največ 2.

(h) Kvadratni matriki  $A$  in  $A^T$  imata iste lastne vrednosti.

(2) (a) Kolikšna je lahko razsežnost vektorskega prostora, ki ga napenjajo vektorji  $x, y, z$  v  $\mathbb{R}^{10}$ ?  
(Zapiši vse možnosti.)

(b) Kolikšna je razsežnost realnega vektorskega prostora, ki ga tvorijo vse zgornje trikotne kvadratne matrike velikosti  $n$ ?

(c) Dana je kvadratna matrika  $A$ , za katero je  $\det(A) = -1$ . Izračunaj  $\det(A^{2017})$ .

(d) Kolikšna je razsežnost ortogonalnega komplementa vektorskega podprostora, ki ga napenja polinom  $x^2 + 1$ , v prostoru vseh polinomov stopnje največ 2?

(e) Karakteristični polinom matrike  $A$  je  $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ . Poišči lastne vrednosti matrike  $A$ . Izračunaj ranga matrik  $A$  in  $A - I$ . Kaj lahko poveš o rangu matrike  $A + I$ ?

(f) Dana je matrika  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 7 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ . Koliko znaša vsota vseh njenih lastnih vrednosti?

(g) Karakteristični polinom matrike  $A$  je  $p(x) = x^2 + x + 1$ . Ali je matrika  $A$  obrnljiva? Izrazi inverz matrike  $A$  v obliki  $\alpha A + \beta I$  za neki realni števili  $\alpha$  in  $\beta$ .

(h) Matrika  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ima lastne vrednosti 0, 1, 2. Izračunaj vrednost izraza  $A^3 - 3A^2 + 2A$ .

- (3) Poišči lastne vrednosti naslednjih matrik in izračunaj njihove algebraične in geometrične večkratnosti:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$