

Linearna algebra - teoretični izpit

9. september 2011

Odgovore na vprašanja in rešitve problemov napišite **čitljivo** v prazen prostor pod vsako nalogo. Račune in utemeljitve napišite na pomožni list.

1. (a) V \mathbb{R}^3 naj bo podana ravnina $\Sigma : 2x + y - 3z = 0$. Koliko morata biti a in b , da bo premica p , določena z enačbo $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{3}$ prebadala ravnino Σ pravokotno? V kateri točki jo prebada?

(b) Določite nek enotski vektor, ki je pravokoten na premico p .

(c) Določite nek enotski vektor, ki leži v ravnini Σ .

2. Za koliko vrednosti parametra b matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & b & b \\ b & b & b \\ 0 & 7 & b \end{bmatrix}$$

ni obrnljiva? Katere so te vrednosti? Zakaj?

3. Prav ali narobe (če je trditev pravilna, napiši zakaj, če je napačna, zapiši protiprimer):

(a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

(b) $\det(A) = \det(A^T)$

(c) $\det(3A) = 3 \det(A)$

(d) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

(e) Če je matrika A obrnljiva, potem je $\det(A) \neq 0$

4. Matrika A velikosti 3×3 ima lastne vrednosti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = c$ in $\lambda_3 = 2$ ter pripadajoče lastne vektorje

$$\mathbf{x}_1 = [1, 1, 2]^T, \mathbf{x}_2 = [1, -1, 0]^T, \mathbf{x}_3 = [1, 1, -1]^T.$$

(a) Za katere vrednosti c je matrika A diagonalizabilna? Zakaj?

(b) Za katere vrednosti c je matrika A lahko simetrična? Zakaj?

(c) Za katere vrednosti c je matrika A pozitivno definitna? Zakaj?

(d) Za katere vrednosti c je matrika $A/2$ lahko projekcijska? Zakaj?