

# Primer Gaussove eliminacije sistema z neskončno rešitvami

Fakulteta za računalništvo in informatiko  
Univerza v Ljubljani

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

**0 ne more biti pivot**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

**0 ne more biti pivot**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

**0 ne more biti pivot**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) //$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

**0 ne more biti pivot**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) // \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) /$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

**0 ne more biti pivot**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) // \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

**0 ne more biti pivot**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

**0 ne more biti pivot**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} // \\ / \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

**0 ne more biti pivot**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} // \\ / \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} // \\ / \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ III - II \\ IV - 2II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} // \\ / \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ III - II \\ IV - 2II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{matrix}$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} // \\ / \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ IV - 2I \end{matrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ III - II \\ IV - 2II \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} // \\ / \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III / (-5) \\ IV / (-4) + III / 5 \end{array}$$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III / (-5) \\ IV / (-4) + III / 5 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III / (-5) \\ IV / (-4) + III / 5 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

IV  $0 = 0$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III / (-5) \\ IV / (-4) + III / 5 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

IV  $0 = 0$

III  $z = 1$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III / (-5) \\ IV / (-4) + III / 5 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

IV  $0 = 0$

III  $z = 1$

II  $y + 2z = 3 \implies y = 1$

# Gaussova eliminacija: pivotiranje in neskončno rešitev

**pivot**

**podpivotni element**

že urejeno: ne spreminjamo več

0 ne more biti pivot

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} // \\ / \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - 2II \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III - 2I \\ IV - 2I \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ III / (-5) \\ IV / (-4) + III / 5 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$IV \quad 0 = 0$$

$$III \quad z = 1$$

$$II \quad y + 2z = 3 \implies y = 1$$

$$I \quad x - y + z = 0 \implies x = 0$$