1. Dani so matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 & -9 \\ -2 & 3 & 7 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ in vektorja } \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ter } \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Poišči vse rešitve sistemov $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ ter $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$.

Rešitev: Rešitve sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ so vektorji $\mathbf{x} = [2x_5 - x_3, 3x_5 - 3x_3, x_3, x_5 - 1, x_5]^\mathsf{T}$, kjer sta x_3 in x_5 poljubni realni števili. Sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ nima rešitev.

2. Kako sta rešljivost in število rešitev spodnjega sistema odvisni od parametra $a \in \mathbb{R}$? Kaj so rešitve?

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & ax_2 & + & (a^2-1)x_3 & + & x_4 & = & 1-a \\ & & ax_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1-a \\ -x_1 & - & ax_2 & + & (1-a^2)x_3 & & & = & -1 \\ x_1 & & & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}$$

Rešitev: Če je $a \neq -1, 0, 1$, ima sistem eno samo rešitev (ta je enaka $\mathbf{x} = [\frac{2-a^2}{a+1}, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}, -a]^\mathsf{T}$). Če je $a = -1$, sistem nima rešitev, če je $a = 0$, ima sistem neskončno rešitev $\mathbf{x} = [2, x_2, 1, 0]^\mathsf{T}$, kjer je $x_2 \in \mathbb{R}$ poljuben, če je $a = 1$, ima sistem prav tako neskončno rešitev, te so $\mathbf{x} = [x_3, 1 - x_3, x_3, -1]^\mathsf{T}$ s poljubnim $x_3 \in \mathbb{R}$.

3. Imamo matriko D ter vektorje $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4$:

$$D = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kateri od sistemov $D\mathbf{x} = \mathbf{y}_i$ so rešljivi? Ali ima kateri od teh sistemov eno samo rešitev? Zakaj (ne)?

Rešitev: Sistem $D\mathbf{x} = \mathbf{y}_3$ nima rešitev, ostali imajo vsi neskončno rešitev.

4. Naj bosta A in B matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči inverz matrike A.

(b) Poišči matriko X, da bo $AX = B$.

Rešitev: (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

5. Poišči matriko X, da bo veljalo

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

6. Z uporabo Gauss–Jordanove eliminacije izračunaj inverza matrik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ -8 & 8 & -8 & -8 \end{bmatrix},$$

če seveda obstajata. Preveri pravilnost.

Rešitev: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ 7 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, matrika B nima inverza.

7. Naj bodo A, B in C matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Poišči matrike X, Y in Z, da bo veljalo

$$AX = C\,, \quad YB = C \quad \text{in} \quad AZB = C.$$

Rešitev: $X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Ko matrike L, M in N pomnožimo z vektorjem $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$, dobimo naslednje vektorje

$$L\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 3x_1 \end{bmatrix}, \quad M\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad N\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči matrike L, M in N!

Rešitev: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.