

1. Naj bo $\mathbf{a} = [1, 1, 1]^T \in \mathbb{R}^3$. Katere od spodaj naštetih množic so in katere niso vektorski podprostor v \mathbb{R}^3 ?

- $U_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0\}$,
- $U_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 1\}$,
- $U_3 = \{\mathbf{x} = [1, x_2, x_3]^T\}$,
- $U_4 = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, 2x_1 - x_2]^T\}$,
- $U_5 = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,
- $U_6 = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T : x_1 x_2 x_3 = 0\}$,
- $U_7 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}\}$.

2. Naj bo $\mathbf{a} = [1, 1, 1]^T \in \mathbb{R}^3$. Katere od spodaj naštetih množic so in katere niso vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, vektorskem prostoru vseh 3×3 matrik?

- W_1 , množica vseh antisimetričnih matrik A , $A^T = -A$.
- W_2 , množica vseh matrik $A = [a_{ij}]$ z nenegativnimi elementi, tj. $a_{ij} \geq 0$.
- W_3 , množica vseh obrnljivih matrik, tj. matrik A , za katere obstaja A^{-1} .
- W_4 , množica vseh matrik brez inverza, tj. matrik A , ki *niso* polnega ranga.
- W_5 , množica vseh matrik A , katerih stolpci so večkratniki vektorja \mathbf{a} .
- W_6 , množica vseh matrik A , za katere je $\mathbf{a} \in N(A)$, tj. $A\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

3. Naj bo A $n \times m$ matrika.

- (a) Označimo z $N(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ množico vseh rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tj. $N(A) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Preveri, da je $N(A)$ vektorski podprostor v \mathbb{R}^m . Pravimo mu *ničelni prostor matrike A*.
- (b) Označimo s $C(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnožico vseh linearnih kombinacij stolpcev matrike A . Preveri, da je $C(A)$ vektorski podprostor v \mathbb{R}^n . Pravimo mu *stolpčni prostor matrike A*.
- (c) Konkretno naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči 2 vektorja iz \mathbb{R}^5 , da bo njuna linearna ogrinjača $N(A)$. Poišči 3 vektorje iz \mathbb{R}^5 , da bo $C(A)$ njihova linearna ogrinjača.

Rešitev: ...le (c) del:

$$N(A) = \mathcal{L}(\{[1, 0, 0, 0, -1]^T, [0, 1, 0, -1, 0]^T\}),$$

$$C(A) = \mathcal{L}(\{[1, 3, 3, 3, 1]^T, [3, 1, 3, 1, 3]^T, [3, 3, 1, 3, 3]^T\}).$$