1. Naj bo $\mathbf{a} = [1,1,1]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$. Za spodnje podmnožice v $\mathbb{R}^{3\times 3}$ smo prejšnji teden utemeljili, da so vektorski podprostori. Poišči/opiši baze in določi dimenzije teh podprostorov!

   ☑ W_1, množica vseh antisimetričnih matrik A, $A^\mathsf{T} = -A$.

   ☑ W_5, množica vseh matrik A, katerih stolpci so večkratniki vektorja $\mathbf{a}$.

   ☑ W_6, množica vseh matrik A, za katere je $\mathbf{a} \in N(A)$, tj. $A\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Rešitev: $B_{W_1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim W_1 = 3$,

$B_{W_5} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim W_5 = 3$,

$B_{W_6} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim W_6 = 6$,

2. Naj bo $W \leq \mathbb{R}^4$ vektorski podprostor vseh vektorjev $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^\mathsf{T}$, za katere velja $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

   (a) Preveri, da sta vektorja $\mathbf{u} = [1,1,0,0]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{v} = [1,1,3,3]^\mathsf{T}$ vsebovana v W.

   (b) Dopolni množico $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ do baze za W (če je to potrebno).

   (c) Poišči matriki A in B, da bo $W = C(A) = N(B)$.

   (d) Ali obstaja 4×4 matrika A, da je $W = C(A) = N(A)$?

Rešitev: (b) Dodamo npr. $\mathbf{w} = [1,0,0,1]^\mathsf{T}$. (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [1,-1,1,-1]$. (d) Ne.

3. Naj bo $W \leq \mathbb{R}^4$ linearna ogrinjača vektorjev iz množice

$$L = \{[1,2,1,1]^\mathsf{T}, [-2,1,-2,-2]^\mathsf{T}, [1,-2,-3,5]^\mathsf{T}, [0,-1,4,-4]^\mathsf{T}\},$$

   tj. $W = \mathcal{L}(L)$. Naj bo $\mathbf{v} = [-2,2,-6,2]^\mathsf{T}$.

   (a) Zapiši vektor $\mathbf{v}$ kot linearno kombinacijo vektorjev iz L. Lahko to storimo na več načinov?

   (b) Opiši vse linearne kombinacije vektorjev iz L, ki so enake $\mathbf{0}$.

   (c) Utemelji: Če iz L odstranimo en (katerikoli) vektor, dobimo linearno neodvisno množico vektorjev.

   (d) Poišči bazo za W.

Rešitev: Naj bodo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ po vrsti vektorji iz L. (a) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Da, lahko.
(b) $\alpha\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2 + \alpha\mathbf{v}_3 + \alpha\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. (c) To postane jasno po Gaussovi eliminaciji.
(d) $B_W = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

4. Dani so vektorji

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

   (a) Iz tega nabora vektorjev izberi največji možen nabor linearno neodvisnih vektorjev.
   (b) Ali izbran nabor vektorjev predstavlja bazo prostora $\mathbb{R}^4$?
   (c) Kako bi ostale vektorje izrazil kot linearne kombinacije prej izbranih?

Rešitev: (a) Recimo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}$. (b) Da. (c) $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{w} = 7\mathbf{v} - 2\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

5. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči bazi ničelnih prostorov $N(A)$ in $N(B)$ matrik A in B. Ali velja $N(A) = N(B)$?
   (b) Prepričaj se, da sta stolpčna prostora $C(A)$ in $C(B)$ enaka.

Rešitev: (a) Npr. $B_{N(A)} = \{[-2,1,1]^\mathsf{T}\}$, $B_{N(B)} = \{[1,-1,-2]^\mathsf{T}\}$. $N(A) \neq N(B)$.
(b) Uporabimo Gaussovo eliminacijo na $[A \mid B]$ ter $[B \mid A]$.

6. Dani so matrika K ter vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Ali sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ vsebovana v $N(K)$? ... v $C(K)$?
   (b) Poišči baze in določi dimenzije podprostorov $N(K)$, $C(K)$, $N(K) \cap C(K)$ ter $N(K) + C(K)$.

V (b) je *vsota* vektorskih podprostorov $U, V \leq W$, vektorski podprostor $U + V \leq W$, v katerem so vse možne vsote vektorjev iz U in V, tj. $U + V := \{u + v : u \in U \text{ in } v \in V\}$. Preveriš lahko, da velja $U + V = \mathcal{L}(U \cup V)$, in s tem hkrati potrdiš, da je $U + V$ vektorski podprostor.

Rešitev: (a) $\mathbf{a} \in N(K)$, $\mathbf{b} \notin N(K)$. $\mathbf{a} \in C(K)$, $\mathbf{b} \in C(K)$.
(b) $B_{N(K)} = \{[1,1,1,0]^\mathsf{T}, [-1,0,0,1]^\mathsf{T}\}$, $B_{C(K)} = \{[1,1,2,2]^\mathsf{T}, [1,0,1,1]^\mathsf{T}\}$, $B_{N(K)\cap C(K)} = \{[0,1,1,1]^\mathsf{T}\}$, $B_{N(K)+C(K)} = \{[1,1,1,0]^\mathsf{T}, [-1,0,0,1]^\mathsf{T}, [1,0,1,1]^\mathsf{T}\}$.