

1. Katere od spodaj naštetih preslikav med vektorskimi prostori so linearne? Za tiste, ki so linearne, poišči še matrike, ki jim pripadajo v standardnih bazah.

(a) $\eta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\eta([x_1, x_2, x_3]^T) = [x_1 + x_2, x_2 + x_3]^T$,

(b) $\theta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta([x_1, x_2, x_3]^T) = [x_1 x_2, x_2 x_3]^T$,

(c) $\xi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\xi([x_1, x_2, x_3]^T) = [x_1 + 1, x_2 + 2]^T$,

(d) $\sigma: \mathbb{R}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma([\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, tj. σ vrne vsoto stolpcev matrike $X = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$,

(e) $\psi: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\psi(X) = X^T + X$,

(f) $\omega: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\omega(X) = X^T X$.

Rešitev: (a) Je, $A_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (b,c) Nista. (d) Je, $A_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (e) Je, $A_\psi = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (f) Ni.

2. Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Preslikava $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ima predpis $\phi(\mathbf{x}) = A^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}$.

(a) Preveri, da je ϕ linearna.

(b) Poišči matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi \mathbb{R}^2 .

(c) Poišči bazo za $\ker \phi$.

Rešitev: (b) $A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. (c) $B_{\ker \phi} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

3. Naj bo $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T \in \mathbb{R}^3$ neničeln vektor. Preslikava $\eta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dana s predpisom $\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

(a) Prepričaj se, da je η linearna preslikava.

(b) Poišči matriko, ki pripada η v standardni bazi \mathbb{R}^3 .

(c) Poišči bazi za $\ker \eta$ in $\text{im } \eta$. Če ne gre v splošnem, pa vsaj za $\mathbf{a} = [1, 1, 1]^T$.

Rešitev: (b) $A_\eta = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$. (c) Za $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ je $B_{\ker \eta} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $B_{\text{im } \eta} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

4. V \mathbb{R}^3 so dani vektorji $\mathbf{a} = [1, 1, 0]^T$, $\mathbf{b} = [1, 0, 1]^T$ in $\mathbf{c} = [0, 1, 1]^T$ ter linearna preslikava $\mathcal{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, za katero velja

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}, \quad \mathcal{F}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \text{ter} \quad \mathcal{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{c}.$$

(a) Pokaži, da je $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ baza prostora \mathbb{R}^3 .

(b) Zapiši matriko preslikave \mathcal{F} v bazi $B = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

- (c) Zapiši matriko preslikave \mathcal{F} v standardni bazi $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ prostora \mathbb{R}^3 .
- (d) Kam \mathcal{F} preslika vektor $[1, 1, 1]^T$?
- (e) Kaj je $\ker \mathcal{F}$? Ali je \mathcal{F} bijekcija?

Rešitev: (b) $A_{\mathcal{F}, B, B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (c) $A_{\mathcal{F}, S, S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (d) $\mathcal{F} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(e) $\ker \mathcal{F} = \{\mathbf{0}\}$ in \mathcal{F} je bijekcija.