Algoritmi in podatkovne strukture 1

Visokošolski strokovni študij Računalništvo in informatika

Asimptotična zahtevnost

Jurij Mihelič, UniLj, FRI

Zahtevnost algoritmov

- Težavno računanje *natančne zahtevnosti*
  - upoštevanje **podrobnosti**
  - poznavanje **cen** (konstante) posameznih ukazov
  - upoštevanje dejanskih **vhodnih podatkov**
- Omejena uporabnost
  - **raznolikost** modelov / arhitektur / programskih jezikov (imajo različne konstante)
  - **veliko** različnih modelov
  - v **praksi** na čas izvajanja vpliva tudi operacijski sistem in druga programska oprema

Zahtevnost algoritmov

- Poenostavitev
  - zanima nas le ***ocena zahtevnosti*** algoritma
  - Kako se spremeni zahtevnost, če se spremeni velikost naloge?
  - Kako se zahtevnost obnaša pri velikih nalogah?
    - velikost naloge $n \to \infty$

Zahtevnost algoritmov

- Poenostavitev
  - natančna zahtevnost je pogosto »*grda*« funkcija

$$T(n) = 4/3n^3 + 2\sqrt{n}\lg n - 16 \lg n + 42$$

  - ocena zahtevnosti pa »*lepa*«

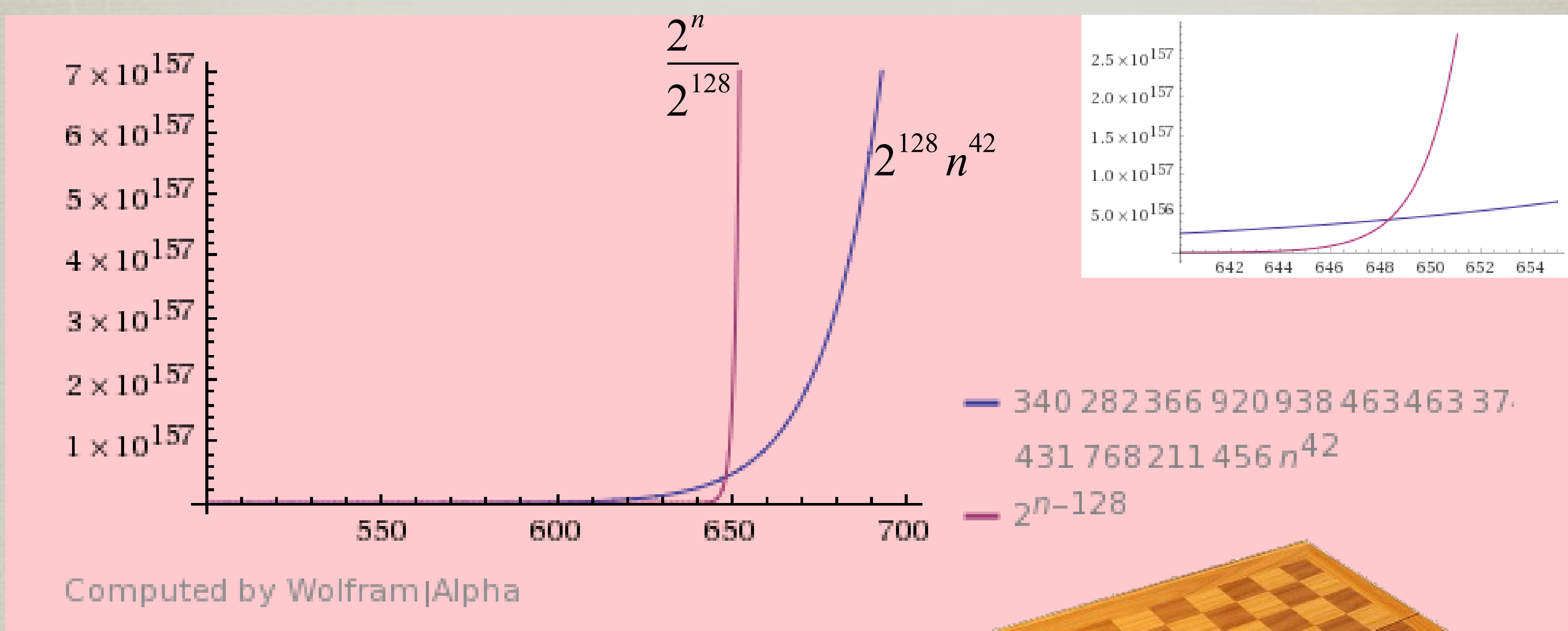
$T(n)$ je reda n^3

$T(n)$ narašča hitreje kot n^2

$T(n)$ ne narašča hitreje kot n^4

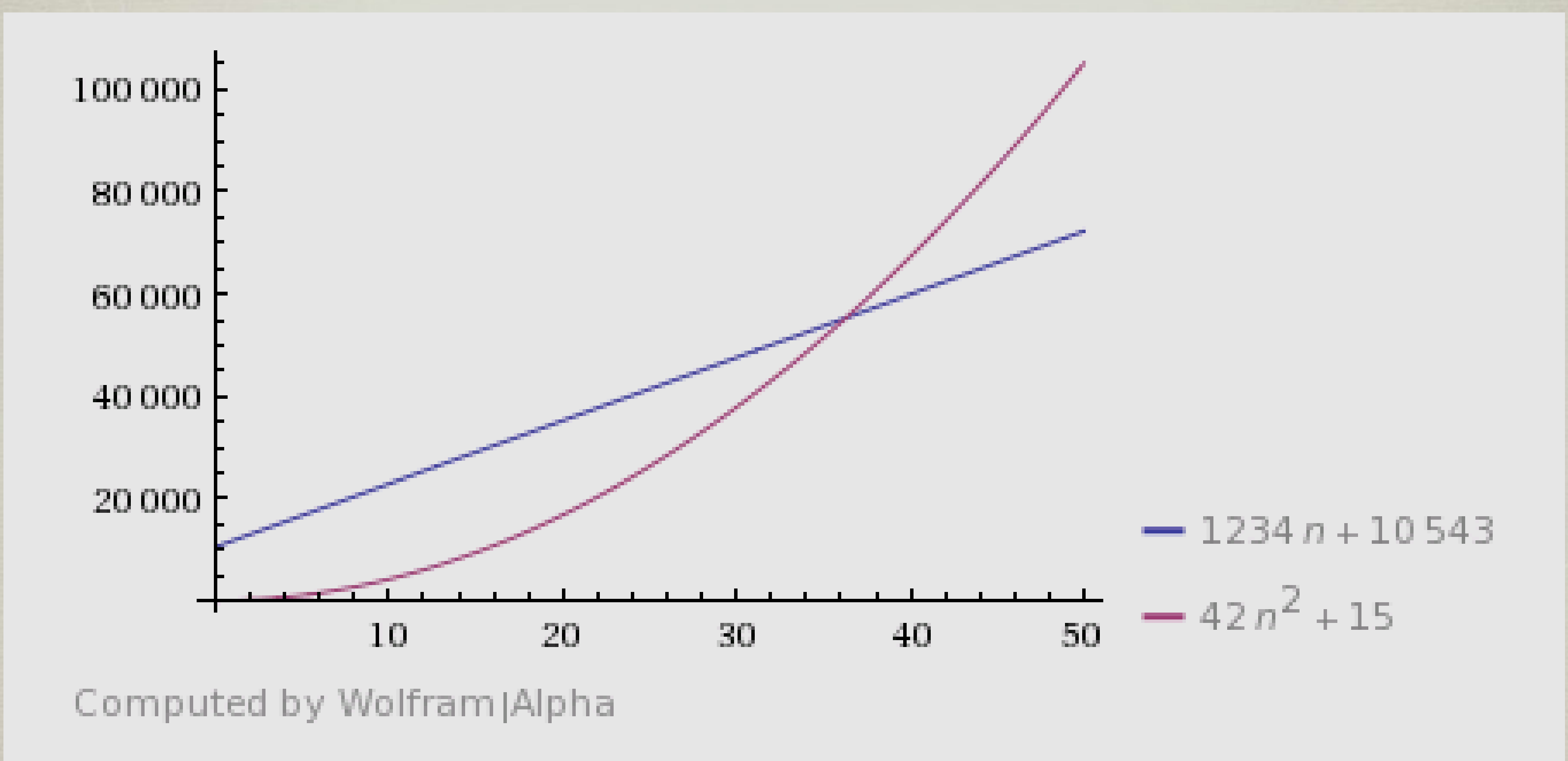
Asimptotična zahtevnost

- Zakaj $n \to \infty$?



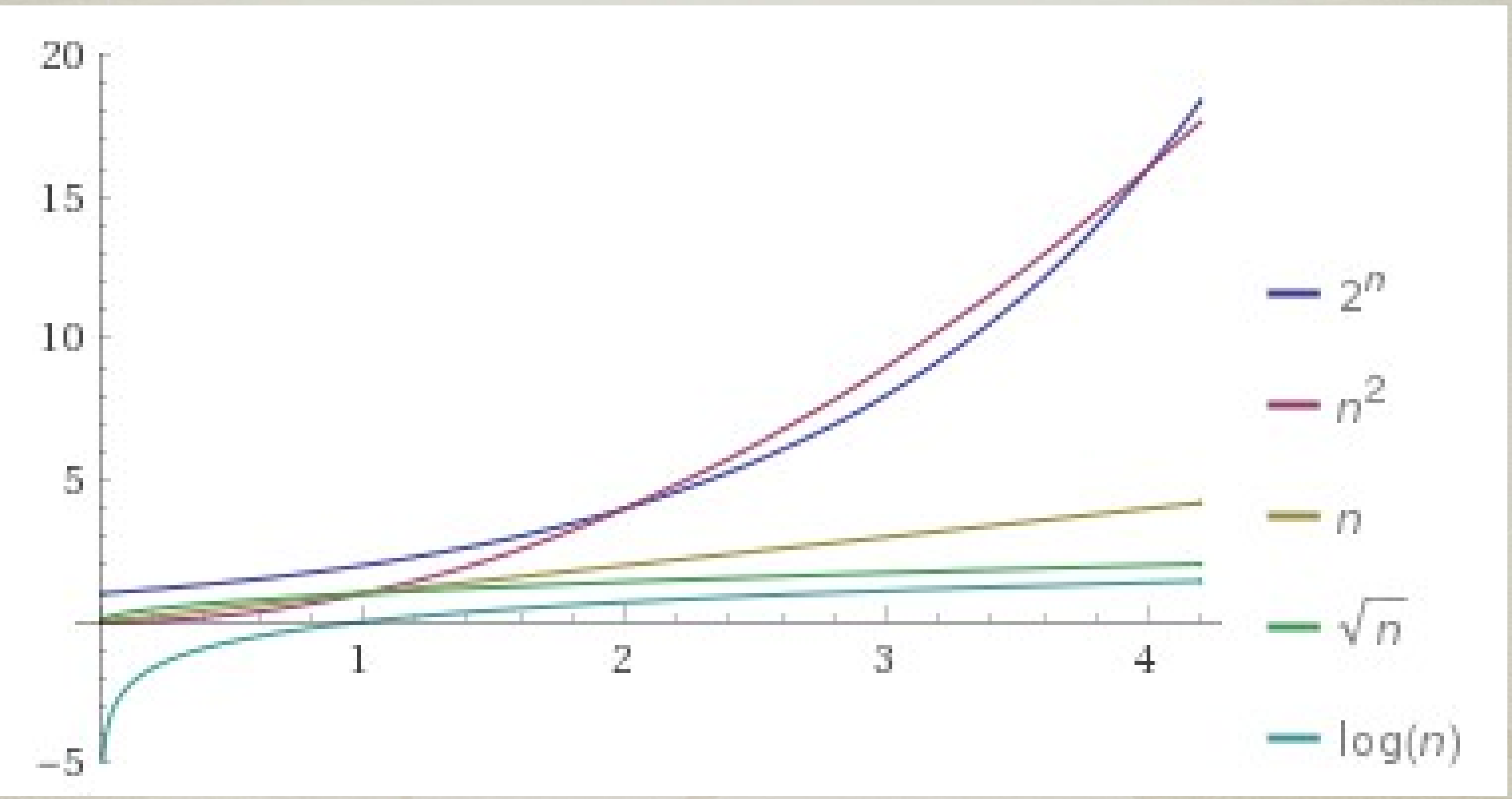
Asimptotična zahtevnost

- Zakaj $n \to \infty$?



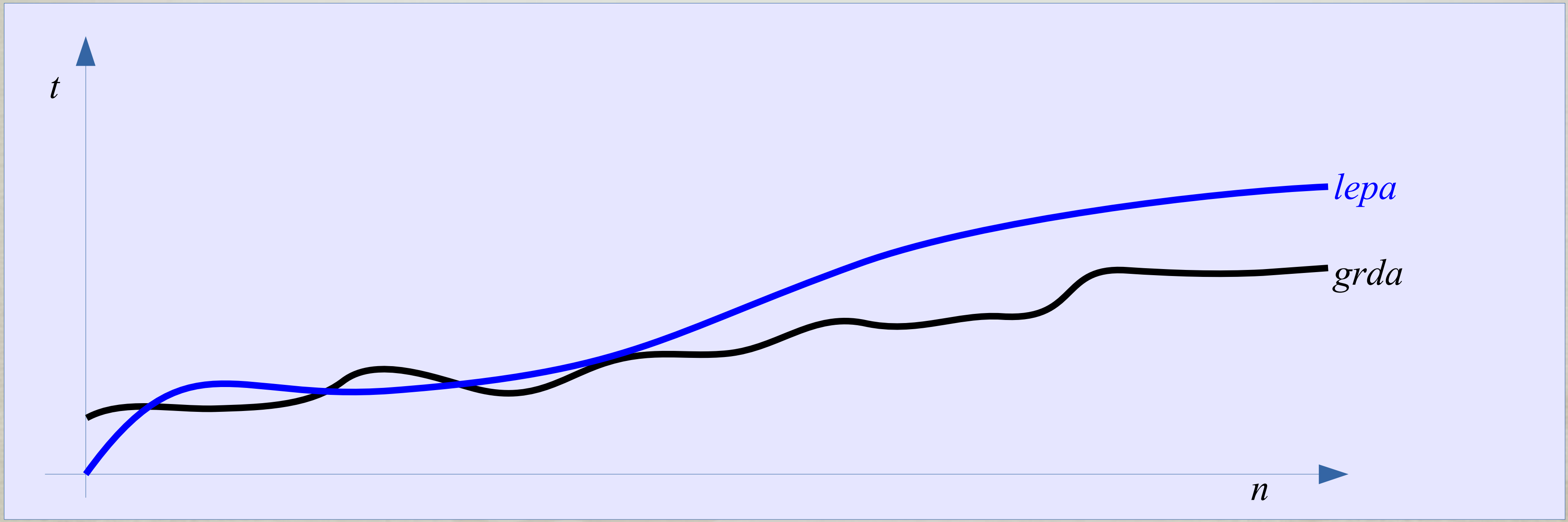
Asimptotična zahtevnost

- Zakaj $n \to \infty$?



Asimptotična zahtevnost

- Zahtevnost lahko ocenjujemo od:
  - zgoraj,
  - spodaj,
  - od zgoraj in spodaj.

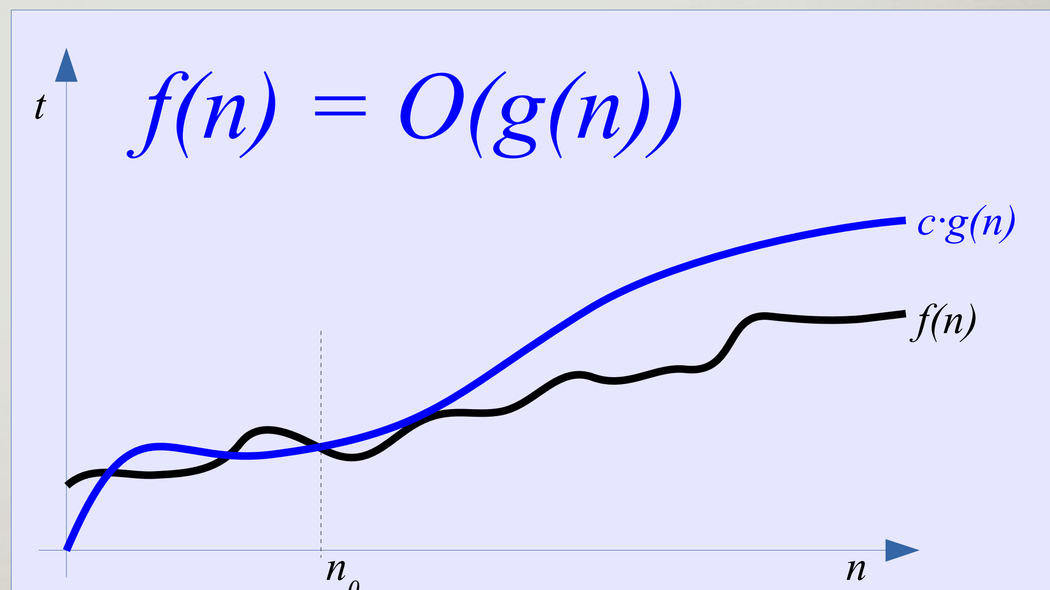


Asimptotska notacija

- ¬-notacija – **zgornja** asimptotična meja
  - f je od zgoraj omejena z g
  - f ne raste hitreje kot g
  - f je kvečjemu reda g

$$\begin{aligned} 5n^2 + 3 \quad & \neq O(\log n) \\ & \neq O(n) \\ & \neq O(n^{1.9}) \\ & \mathbf{= O(n^2)} \\ & = O(n^3) \\ & = O(1.001^n) \\ & = O(2^n) \end{aligned}$$

*Katera izmed zgornjih mej je **tesna**?*



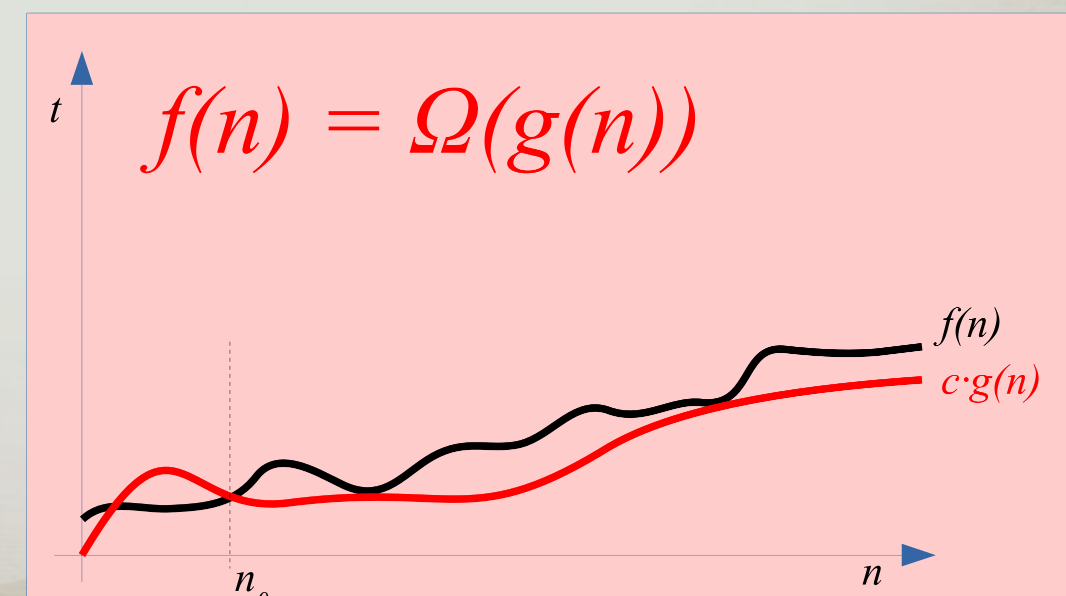
Omega

Asimptotska notacija

- *Ω*-notacija – **spodnja** asimptotična meja
  - f je od spodaj omejena z g
  - f ne raste počasneje kot g
  - f je vsaj reda g

$$
\begin{aligned}
5n^2 + 3 &= \Omega(\log n) \\
&= \Omega(n) \\
&= \Omega(n^{1.9}) \\
&\boldsymbol{= \Omega(n^2)} \\
&\neq \Omega(n^3) \\
&\neq \Omega(1.001^n) \\
&\neq \Omega(2^n)
\end{aligned}
$$

*Katera izmed spodnjih mej je **tesna**?*

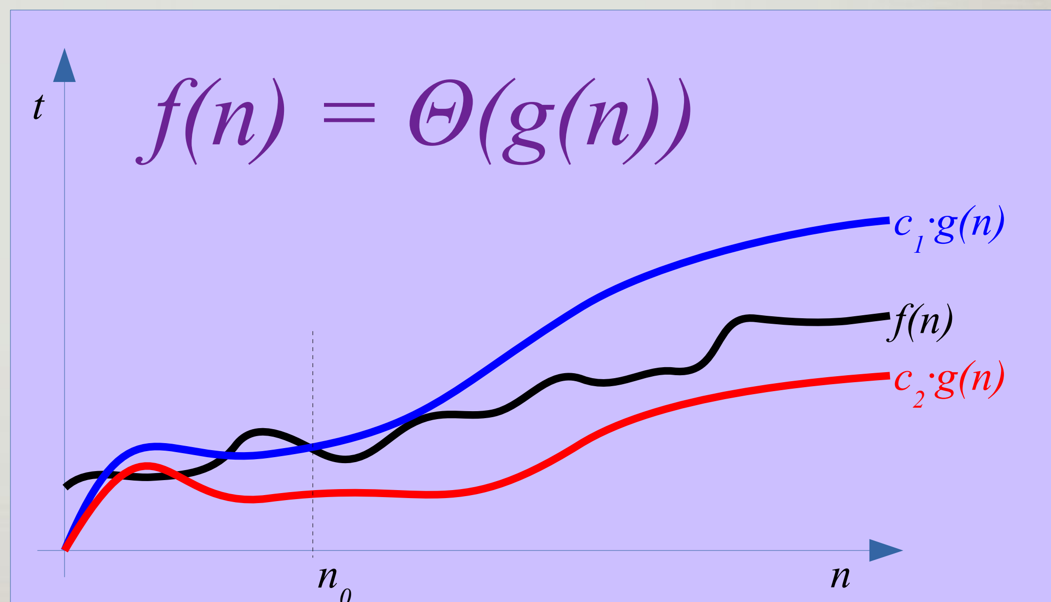


Téta

Asimptotska notacija

- Θ-notacija – **tesna** asimptotična meja
  - f je od zgoraj in od spodaj omejena z g
  - f je reda g

$$
\begin{aligned}
5n^2 + 3 \quad & \neq \Theta(\log n) \\
& \neq \Theta(n) \\
& \neq \Theta(n^{1.9}) \\
& = \Theta(n^2) \\
& \neq \Theta(n^3) \\
& \neq \Theta(1.001^n) \\
& \neq \Theta(2^n)
\end{aligned}
$$



Asimptotska notacija

- Formalne definicije

Donald E. Knuth

Množice

≤	$O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c g(n) \}$
=	$\Theta(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$
≥	$\Omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c g(n) \leq f(n) \}$

Opomba: vse funkcije so nenegativne.

Asimptotska notacija

- *Bonus: *o* in *ω* notacija

$<$ $\quad o(g(n)) = \{ f(n) \mid \forall c > 0 \, \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) < c g(n) \}$

$\leq$ $\quad O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c g(n) \}$

$=$ $\quad \Theta(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$

$\geq$ $\quad \Omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c, n_0 > 0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c g(n) \leq f(n) \}$

$>$ $\quad \omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \forall c > 0 \, \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 : 0 \leq c g(n) < f(n) \}$

Opomba: vse funkcije so nenegativne.

Asimptotska notacija

- Ustaljena (zlo-)raba
  - namesto $\in$ uporabljamo =
    - za vse O, Ω in Θ

$$f(n)=O(g(n)) \equiv f(n)\in O(g(n))$$

  - Leva za vse / desna za enega

$$2n^2+3n+1=2n^2+\Theta(n)=\Theta(n^2)$$

*Notacija s ~ (tildo)

Robert Sedgewick

- f(n) ~ g(n)

$$f(n) \sim g(n) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

- Intuitivno
  - ujemanje v redu velikosti
  - ujemanje v konstanti
  - kot Θ-notacija s konstanto
  - npr.: $5n^3 + 2n^2 + n + \lg n \sim 5n^3$

Asimptotska notacija

- Z limitami

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

namig	notacija	limita
$<$	o	$L = 0$
$\leq$	$\boldsymbol{O}$	$\mathbf{0 \leq L < \infty}$
$=$	$\boldsymbol{\Theta}$	$\mathbf{0 < L < \infty}$
$\geq$	$\boldsymbol{\Omega}$	$\mathbf{0 < L \leq \infty}$
$>$	ω	$L = \infty$
$\sim$	$\sim$	$L = 1$

Razredi asimptotske zahtevnosti

Funkcija	Razred zahtevnosti
1	konstantna
$\lg n$	logaritemska
n	linearna
$n \lg n$	linearitmična, n-log-n
n^2	kvadratna
n^3	kubična
2^n	eksponentna
$n!$	faktoriela

Moorov zakon

- Čas pri podvojeni nalogi
- Velikost naloge pri podvojeni hitrosti

$T(n)$	$T(2n)$	velikost za 2v
lg n	$T(n) + 1$	n^2
n	$2\ T(n)$	$2n$
$n \lg n$	$2\ T(n) + 2n$	$\sim 2n$
n^2	$4\ T(n)$	$\sqrt{2}n = 1{,}41n$
n^3	$8\ T(n)$	$\sqrt[3]{2}n = 1{,}26n$
2^n	$2^n\ T(n)$	$n + 1$

Računanje z asimptotsko notacijo

- Izrek (simetrija):

$$f(n)=\Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n)=\Omega(g(n)) \wedge f(n)=O(g(n))$$

- Izrek (transponirana simetrija):

$$f(n)=O(g(n)) \Leftrightarrow g(n)=\Omega(f(n))$$

- Izrek (tranzitivnost):
  - Velja za vse O, Ω, Θ, o in ω

$$f(n)=O(g(n)) \wedge g(n)=O(h(n)) \Rightarrow f(n)=O(h(n))$$

Računanje z asimptotsko notacijo

- Eliminacija konstante:
  - če velja za Θ, potem velja tudi za O in Ω

$$c>0: c\cdot f(n)=\Theta(f(n))$$

- Produkt:

$$f(n)\cdot g(n)=\Theta(f(n)\cdot g(n))$$

- Vsota:

$$f(n)+g(n)=O(max(f(n),g(n)))$$

$$f(n)+g(n)=\Omega(min(f(n),g(n)))$$

Povzetek

- Natančna zahtevnost je zahtevna
- Asimptotska notacija
  - definicije
  - zloraba
- Notacija s tildo
- Z limitami
- Razredi asimptotične zahtevnosti
- Računanje z asimptotično notacijo