Linearna algebra **Teden 8**

Determinante

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- *Determinanta*.
  - Uvod:
    - Zakaj potrebujemo determinante in kaj nam bodo predstavljale? video.
    - Še boljša ilustracija: 3Blue1Brown, The determinant.
  - Definicija *determinante* (aksiomi D1-D3, rekurzivna formula, definicija), video.
    - Primer računanja determinante z rekurzivno formulo, determinanta zgornje trikotne matrike, video.
    - ↯ Naloga 1: S pomočjo rekurzivne formule izračunajte

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  - Lastnosti determinant, video.

    S tem smo spoznali nov način računanja determinant podoben Gaussovi eliminaciji: Determinanto poljubne kvadratne matrike izračunamo tako, da s pomočjo pravil (1)-(3) preoblikujemo matriko v zgornje ali spodnje trikotno matriko, katere determinanto že znamo izračunati. Dovoljenje operacije so:

(pravilo 1) Če zamenjamo dve vrstici, se spremeni predznak determinante.

(pravilo 2) Vrednost determinante se ne spremeni, če neki vrstici prištejemo poljuben večkratnik katerekoli druge vrstice.

(pravilo 3) Če vse elemente neke vrstice pomnožimo z istim številom α, se vrednost determinante pomnoži z α.

Za računanje rešitev linearnega sistema $A\vec{x}=\vec{0}$ smo želeli z elementarnimi operacijami Gaussove eliminacije preoblikovati matriko A v vrstično stopničasti obliko, saj smo lahko iz nje preprosteje razbrali rešitve. Tudi pri determinantah je cilj isti: s pomočjo pravil (1)-(3) želimo preoblikovati matriko v vrstično stopničasto obliko, torej zgornje trikotno matriko. Pri tem pa bodite š posebej pazljivi: te operacije so na prvi pogled zelo podobne elementarnim operacijam Gaussove eliminacije, pa vendar se oba algoritma ujemata le v pravilu (2).

– Primer: S pomočjo pravil (1)-(3) izračunajte determinanto matrike
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
(Če ne gre, si oglejte rešitev.)

$\lightning$ Naloga 2: S pomočjo pravil (1)-(3) izračunajte
$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

– Spoznajte še več lastnosti determinant, video.
  - $\lightning$ Naloga 3: Zapišite primera matrik A, B, za kateri je $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.
  - $\lightning$ Naloga 4: Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, za kateri velja $\det(A) = 2$ in $\det(B) = 3$. Izračunajte determinante matrik $2A$, $-A$, A^2, A^{-1} in $ABAB^{-1}$.

– Za determinanto velja
$$\det(A^\mathsf{T}) = \det(A).$$
Tega ne bomo dokazali, bomo pa s pridom uporabljali posledice te lastnosti: vse operacije, ki vsebujejo računanje z vrsticami determinante, lahko torej uporabljate tudi računanje s stolpci. (Pazite, tega pri Gaussovi eliminaciji NE smete delati.) video.

– Na zapiskih tedna lahko preverite sedaj obe rešitvi nalog 1 in 2, tako s pomočjo rekurzivne formule in razvoja po prvem stolpcu, kot s pomočjo pravil (1)-(3).

– S pomočjo determinant lahko računamo tudi inverze obrnljivih matrik, video.
  - $*$ Primer video.
  - $\lightning$ Naloga 5: Se spomnite snovi 4. tedna in ugotavljanja, kdaj je 2×2 matrika
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
obrnljiva? Sedaj na isto vprašanje odgovorite še s pomočjo determinant in v primeru, ko je A obrnljiva ,izračunajte njen inverz A^{-1}.

- Zapiski predavanj, 8. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Poglavje 5.
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 5.
(3) Gilbert Strang, Video Lectures:
    (a) Lecture 18: Properties of determinants.

(b) Lecture 19: Determinant formulas and cofactors.

(4) Polona Oblak: Matematika, razdelek 6.3 (brez dokazov, le recepti in primeri).

⋆ (5) Determinante so uporabne tudi za reševanje sistemov enačb. Oglejte si:

(a) predavanje Gilberta Stranga, Video Lectures: Lecture 20: Cramer's rule, inverse matrix, and volume

(b) vizualizacijo 3Blue1Brown: Cramer's rule, explained geometrically.

3. Ali razumem snov?

ϟ(1) Če je $\det A = 5$ in $\det B = 3$, izračunajte $\det(A^T BAB^{-1})$.

ϟ(2) Naj bo $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takšna matrika, da velja $Q^T Q = I$. Izračunajte vse možne vrednosti determinante matrike Q.

ϟ(3) Naj bo $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika, za katero velja $P^2 = P$. Izračunajte vse možne vrednosti determinante matrike P.

ϟ(4) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.

(a) Če je $\det(A) = 3$, potem je $\det(I + A) = 4$.

(b) Če je A matrika reda $n \times n$, potem je $\det(nA) = n \det(A)$.

(c) Če sta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potem je $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A^2) - \det(B^2)$

(d) Če sta A in B obrnljivi matriki, potem je $\det(AB) = 0$.

(e) Množica vseh matrik $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za katere velja $\det(A) = 0$, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

ϟ(5) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Poglavje 4.