Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

13. november 2024

Kaj je relacija

Množica R je *(dvomestna) relacija*, če je vsak njen element urejen par.

$$R \text{ je relacija.} \iff \forall x \in R \, \exists u, v \, : \, x = (u, v)$$

Množica R je *(dvomestna) relacija v množici* A, če je $R \subseteq A \times A$.

Zgledi

1. $A = \{a, b, c, d\} \qquad R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (c, a)\}$
2. $A = \mathbb{N} \qquad R = \{(x, y)\ ;\ x, y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y\}$
3. $\emptyset \subseteq A \times A$
4. $A \times A \subseteq A \times A$
5. $\mathrm{id}_A = \{(x, x)\ ;\ x \in A\}$

Namesto $(x, y) \in R$ pišemo xRy.

Domena in zaloga vrednosti

Naj bo R relacija v A.
$\mathcal{D}_R = \{x\ ;\ \exists y : xRy\}$ *domena* ali *definicijsko območje* relacije R.
$\mathcal{Z}_R = \{y\ ;\ \exists x : xRy\}$ *zaloga vrednosti* relacije R.

Lastnosti relacij

Naj bo R relacija v A. Pravimo, da je

1. R *refleksivna* $\iff \forall x \in A : xRx$
2. R *simetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$
3. R *antisimetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
4. R *tranzitivna* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
5. R *sovisna* $\iff \forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$
6. R *enolična* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$

Zgledi

1. Relacija id_A v A
2. Relacija $\leq$ v $\mathbb{N}$
3. Relacija $<$ v $\mathbb{N}$
4. Relacija $\subseteq$ v $\mathcal{P}A$
5. Relacija *"oče"* v množici ljudi (x oče y preberemo kot x *je oče* y*-ona.*)

Grafična predstavitev relacije

R naj bo relacija v *končni* množici A.

Elemente množice A narišemo kot *točke* v ravnini. Če velja xRy, narišemo usmerjeno puščico od x do y.

elementi A ... točke v ravnini
xRy ... usmerjena puščica od x do y.

Zgled: $A = \{a, b, c, d\}$ $\quad$ $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (c, a)\}$

Graf in lastnosti relacij

Kako iz grafa relacije R preberemo njene lastnosti?

Operacije z relacijami

Relacije so posebne vrste množic. Vemo, kako so definirane operacije $\cup, \cap$ in $\setminus$.

Ponavadi se pogovarjamo o družini relacij na isti množici A. V takem primeru je *komplement* smiselno definirati kot

$$R^c := (A \times A) \setminus R = U_A \setminus R$$

Operacije z relacijami

Poleg navedenih operacij definiramo tudi:

- *inverzno relacijo* relacije R, označimo jo z R^{-1}:

$$R^{-1} := \{(y, x) \ ; \ (x, y) \in R\}$$

- *produkt relacij* R in S, označimo ga z $R * S$:

$$R * S := \{(x, z) \ ; \ \exists y \ (xRy \wedge ySz)\}$$

Operacije z relacijami

Zgled: sorodstvene relacije med ljudmi

Relacija *oče* v množici ljudi je definirana kot

$$x \,\text{oče}\, y \Leftrightarrow x \text{ je oče } y\text{-ona}..$$

Naloga: Izrazi relacije *roditelj*, *zet*, *snaha*, *ded*, *vnuk*, *tašča*, *svak* z "bolj elementarnimi" sorodstvenimi relacijami *oče*, *mati*, *sin*, *hči*, *mož*, *žena*, ...

Lastnosti operacij z relacijami

Naj bodo R, S, T relacije na A.

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$
3. $(R * S) * T = R * (S * T) =: R * S * T$
4. $R * (S \cup T) = R * S \cup R * T$
5. $(R \cup S) * T = R * T \cup S * T$
6. $R * \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A * R = R$
7. $R \subseteq S \implies R * T \subseteq S * T$ in $T * R \subseteq T * S$

Potence relacij

Zaradi asociativnosti množenja relacij lahko definiramo potence relacij. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

$$\begin{array}{lcl} R^0 & := & \mathrm{id}_A \\ R^{n+1} & := & R^n * R, \text{ če je } n \geq 0. \end{array}$$

Velja $R^1 = R$, $R^2 = R * R$, ter za $m, n \geq 0$ tudi $R^m * R^n = R^{m+n}$.

Potence relacij

Definiramo lahko tudi potence z negativnimi eksponenti, če je $n > 0$, potem je

$$R^{-n} := (R^{-1})^n$$

Potence relacij

Zgled: sorodstvene relacije med ljudmi

Naloga: definiraj relacije *prednik*, *potomec*, *sorodnik*.

Ovojnice

Naj bo R relacija v A.

Relacijo R^+ imenujemo *tranzitivna ovojnica* relacije R in jo definiramo s predpisom

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

Relacijo R^* imenujemo *tranzitivno-refleksivna ovojnica* relacije R in jo definiramo s predpisom

$$R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$$

Algebraična karakterizacija lastnosti relacij

Naj bo R relacija v A. Relacija R je

1. R *refleksivna* $\iff \mathrm{id}_A \subseteq R$
2. R *simetrična* $\iff R^{-1} = R$
3. R *antisimetrična* $\iff R^{-1} \cap R \subseteq \mathrm{id}_A$
4. R *tranzitivna* $\iff R^2 \subseteq R$
5. R *sovisna* $\iff \mathrm{id}_A \cup R \cup R^{-1} = U_a$
6. R *enolična* $\iff R^{-1} * R \subseteq \mathrm{id}_A$

Ekvivalenčna relacija

$R \subseteq A \times A$ je *ekvivalenčna*, če je

- refleksivna,
- simetrična in
- tranzitivna.

Ekvivalenčna relacija

Zgledi:

1. Relacija $||$ vzporednosti v množici vseh premic v ravnini.
2. $A = \{\text{ljudje}\}$, $xRy \iff x$ ima enako barvo oči kot y.
3. Naj bo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Definirajmo relacijo R v množici $\mathbb{Z}$:

$$xRy \iff m \text{ deli } |x - y|$$

Ekvivalenčni razredi

Naj bo $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna in $x \in A$.

$R[x] = \{y \in A \, ; \, yRx\}$ je *ekvivalenčni razred* elementa x.

$A/R = \{R[x] \, ; \, x \in A\}$ (množica vseh ekvivalenčnih razredov) je *faktorska (kvocientna) množica* množice A po relaciji R.

Ekvivalenčni razredi, razbitje

Trditev

Naj bo R ekvivalenčna relacija na A. Potem za poljubna $x, y \in A$ velja

$$R[x] = R[y] \iff xRy$$

Izrek

Naj bo R ekvivalenčna relacija na A. Potem je A/R razbitje množice A.

Zgledi faktorskih množic

- "premice v ravnini" / "vzporedne premice" $=$ $\{\{\text{navpične pr.}\}, \{\text{vodoravne pr.}\}, \{\text{pr. pod kotom } 45^\circ\}, \ldots\} \cong$ "množica vseh *smeri* v ravnini" $\cong [-\pi/2, \pi/2)$

Relacije urejenosti

Naj bo R relacija v množici A.
R *delno ureja* A, če je

1. refleksivna,
2. antisimetrična in
3. tranzitivna.

R *linearno ureja* A, če

1. R delno ureja A in je
2. R sovisna.

Pravimo tudi, da je R *delna* oziroma *linearna urejenost* v/na A.

Relacije urejenosti

Zgledi:

- $\subseteq$ delno ureja vsako družino množic.
- $|$ (deljivost) delno ureja $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\leq$ linearno ureja $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Hassejev diagram

Naj bo A delno urejena z relacijo $\leq$ in naj bosta $x, y \in A$:

$$x <\!\cdot\, y \iff x < y \text{ in } \forall z \in A : (x \leq z \leq y \Rightarrow z = x \vee z = y)$$

Pravimo, da je y je *neposredni naslednik* x-a in
x *neposredni predhodnik* y-a.

Hassejev diagram

Hassejev diagram je slikovni prikaz delne urejenosti.

Naj bo A delno urejena z relacijo $\leq$

elementi A ... točke v ravnini

$a <\!\cdot\, b$ ... a narišemo *nižje* od b in ju povežemo z daljico.

$x \leq y$ velja natanko tedaj, ko lahko v Hassejem diagramu pridemo od x do y po *vzpenjajoči se* poti.

Hassejev diagram

Zgledi:

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, relacija *deli*.
- $\subseteq$ v množici $\mathcal{P}\{1, 2, 3\}$.
- $\leq$ v množici naravnih števil.
- *deli* v množici deliteljev števila 60.

Preslikave

Relacija $f \subseteq A \times B$ je *preslikava iz A v B*, če velja:

- f je enolična
- $\mathcal{D}_f = A$
- $(\mathcal{Z}_f \subseteq B)$

Pišemo tudi $f : A \to B$.

Preslikave

Naj bo f preslikava iz A v B.
Namesto $x\,f\,y$ pišemo $y = f(x)$.

- $A = \mathcal{D}_f$ ... domena ali definicijsko območje f
- $\mathcal{Z}_f$ ... zaloga vrednosti f
- B ... kodomena f

Za množico preslikav iz A v B uporabljamo oznako

$$B^A = \{f \,;\, f : A \to B\}$$

Lastnosti preslikav

Naj bo $f : A \to B$. Pravimo, da je

- f *injektivna*, če $\forall x, y \in A : (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
- f *surjektivna*, če $\mathcal{Z}_f = B$ (pravimo tudi, da je f preslikava iz A na B)
- f *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Zgledi

- $\mathrm{id}_A : A \to A$, *identiteta na A*
  $\mathrm{id}_A(x) = x$, je bijektivna
- $p_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_i$, *projekcija na i-to komponento*
  $p_i((a_1, \ldots, a_n)) = a_i$, je surjektivna
- $A_1 \subseteq A$, $i = \mathrm{id}_A|_A$
  $i : A_1 \hookrightarrow A, i(x) = x$ je injektivna , *vložitev A_1 v A*
- $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna, $p : A \to A/R$
  $p(x) = R[x]$ je surjektivna , *naravna projekcija*
- $A \subseteq B$, $\chi_A : B \to \{0, 1\}$
  $\chi_A(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{array} \right.$,
  karakteristična funkcija množice A (v B)
- $\emptyset$, *prazna preslikava*
  $\emptyset : \emptyset \to B$

Inverzna preslikava

Vprašanje: Kdaj je f^{-1} preslikava?

Trditev

$f : A \to B$

1. *f^{-1} je enolična natanko tedaj, ko je f injektivna,*
2. *$f^{-1} : B \to A$ natanko tedaj, ko je f bijektivna.*

Kompozitum preslikav

Naj bo $f \subseteq A \times B$ in $g \subseteq B \times C$. Definirajmo

$$g \circ f = f * g$$

V tem primeru je $f * g \subseteq A \times C$.

Denimo, da $f : A \to B$ in $g : B \to C$. Potem

$$z = (g \circ f)(x) \;\sim\; x(f * g)z \;\sim\; \exists y : (xfy \wedge ygz) \;\sim$$

$$\sim\; \exists y : (y = f(x) \wedge z = g(y)) \;\sim\; z = g(f(x))$$

Lastnosti kompozituma

Trditev

Naj bo $f : A \to B$. Potem je

$$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$$

Lastnosti kompozituma

Trditev

$f : B \to C, g : A \to B$

1. f, g *injektivni* $\implies$ $f \circ g$ *injektivna*
2. f, g *surjektivni* $\implies$ $f \circ g$ *surjektivna*
3. $f \circ g$ *injektivna* $\implies$ g *injektivna*
4. $f \circ g$ *surjektivna* $\implies$ f *surjektivna*

Lastnosti kompozituma

Trditev

Naj bo $f : B \to A$, $g : A \to B$. *Če je* $f \circ g = \mathrm{id}_A$ *in* $g \circ f = \mathrm{id}_B$, *potem sta* f *in* g *bijekciji in je* $g = f^{-1}$.