Diskretne strukture UNI
Vaje, 9. teden

1. Na množici $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ definiramo relacijo
$$R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,1),(4,1)\}.$$
   (a) Nariši grafe relacij R, $R^2 = R * R$ in $R^3 = R * R * R$.
   (b) Katere izmed zgornjih relacij so refleksivne, simetrične in/ali tranzitivne?

2. Na množici $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ definiramo relacijo
$$R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,1)\}.$$
   (a) Relacijo S definiramo kot $S = R \cup \{(1,3)\}$. Izračunaj relacijo S^{10}.
   (b) Pokaži, da je $S^{2021} = U_A$ (kjer je U_A univerzalna relacija na množici A, tj. $U_A = A \times A$).
   (c) Relacijo T definiramo kot $T = R \cup \{(a,b)\}$, kjer je (a,b) poljuben urejen par, ki *ni* v R. Pokaži, da tudi v tem primeru velja $T^{2021} = U_A$.

3. Na množici besed $\mathcal{B}$ definiramo relacijo R z naslednjim opisom:

   beseda α je v relaciji z besedo β, $\alpha R \beta$, če lahko besedo β sestavimo iz črk besede α z uporabo največ enega dodatnega znaka (črke).

   Tako je $\texttt{hrast}\, R\, \texttt{trak}$, vendar $\neg(\texttt{hrast}\, R\, \texttt{krak})$ in $\neg(\texttt{hrast}\, R\, \texttt{strop})$.

   (a) Denimo, da velja $\alpha R \beta$. V kakšni zvezi sta dolžini besed α in β?
   (b) Nariši graf relacije R v primeru, ko je
$$\mathcal{B} = \{\texttt{klop}, \texttt{lok}, \texttt{oko}, \texttt{pot}, \texttt{prostor}, \texttt{roka}, \texttt{rosa}, \texttt{šola}, \texttt{šotor}, \texttt{top}, \texttt{zora}\}.$$
   (c) Določi (opiši z besedami) relacijo $R \cap R^{-1}$ za splošen $\mathcal{B}$. Lahko si pomagaš z grafom iz prejšnje točke.

4. Na množici $A = \{1,2,\ldots,20\}$ definiramo relacijo R:
$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad y - x \text{ je praštevilo.}$$
   (a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti relacije R.
   (b) Določi množico $\{y \in A \mid 10Ry\}$

5. Na množici števil $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiramo relacijo R:
$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad \gcd(a,b) > 3.$$
   (a) Pokaži, da je $R \subseteq R^2$.
   (b) Ali je relacija R refleksivna, simetrična ali tranzitivna?
   (c) Ali je relacija R^2 refleksivna, simetrična ali tranzitivna?

6. Na množici naravnih števil definiramo relacijo R:
$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad 5 \text{ deli } x + 4y.$$
   Pokaži, da je R refleksivna, simetrična in tranzitivna relacija.

7. Na množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiramo relacijo R:

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+b=c+d.$$

Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija in določi ekvivalenčne razrede.

8. Naj bo $\mathbb{P}$ množica praštevil. Relacija R na $\mathbb{N}$ je podana s predpisom

$$aRb \;\Leftrightarrow\; \forall p \in \mathbb{P} : (p|a \Leftrightarrow p|b).$$

   (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.

   (b) Poišči [2] in [2021].

   (c) Ali obstaja ekvivalenčni razred z enim samim elementom?

9. Na $A = \{1,2,\ldots,100\}$ je podana relacija R s predpisom

$$aRb \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{N}_0 : (2^k|a \Leftrightarrow 2^k|b).$$

   (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.

   (b) Poišči [4].

   (c) Koliko je vseh ekvivalenčnih razredov?

10. Imejmo množico izjavnih veznikov $N = \{0,1,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow,\veebar,\downarrow,\uparrow\}$. Na $\mathcal{P}(N)$ definiramo relacijo $\leq$ tako: nabora $A,B \subseteq N$ sta v relaciji, $A \leq B$, natanko tedaj, ko lahko vsak izjavni izraz z vezniki iz A zapišemo v enakovredni obliki z vezniki iz B.

    (a) Utemelji, da je relacija $\leq$ refleksivna in tranzitivna.

    (b) Utemelji, da iz $A \subseteq B$ sledi $A \leq B$ (za vse $A,B \in \mathcal{P}(N)$).

    (c) Oglejmo si $A = \{0,\Leftrightarrow\}$ in $B = \{0,\neg,\Leftrightarrow\}$. Ali velja $A \leq B$? Ali velja $B \leq A$?

    (d) Je relacija $\leq$ simetrična?

11. Naj bo B_n množica naravnih števil od 0 do $2^n - 1$. Ta števila predstavimo v dvojiškem zapisu; število $b \in B_n$ zapišemo kot $b = \mathsf{b}_n \cdots \mathsf{b}_2\mathsf{b}_1$, kjer so števke b_i enake 0 ali 1. Na B_n definiramo relacijo $\preceq$ z

$$a \preceq b \quad\Leftrightarrow\quad \forall i\,(\mathsf{a}_i \leq \mathsf{b}_i).$$

    (a) Ali velja: $2 \preceq 3$, $5 \preceq 8$, $4 \preceq 5$?

    (b) Prepričaj se, da je $\preceq$ relacija delne urejenosti.

    (c) Skiciraj Hassejev diagram te delne urejenosti v primeru $n = 3$.

    (d) Ali je $\preceq$ relacija linearne urejenosti? Za kateri n oziroma zakaj ne? Kako to sledi iz Hassejevega diagrama?

    (e) Preveri, da velja implikacija: Če $a \preceq b$, potem $a \leq b$.

12. V množici celih števil $\mathbb{Z}$ je dana relacija

$$xRy \quad\Leftrightarrow\quad 7 \text{ deli } x^2 - y^2.$$

    (a) Dokaži, da je relacija R ekvivalenčna.

    (b) Določi ekvivalenčni razred $[1]_R$ števila 1.

    (c) Določi moč faktorske množice $\mathbb{Z}/R$.