Matematika

Bojan Orel

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

Nedoločeni integral

Za dano funkcijo f bi radi našli neko funkcijo F, katere odvod je f.

Definicija

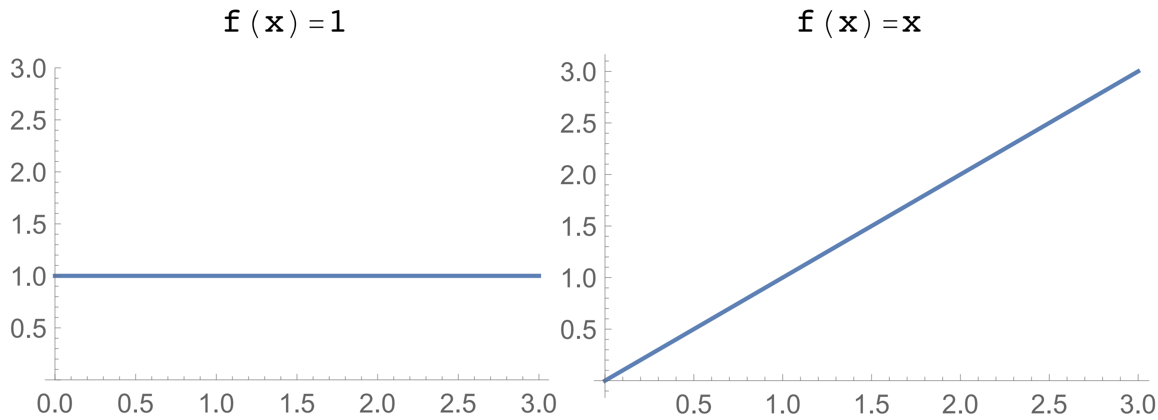
Naj bo $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, kjer $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ odprti interval. Če za $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ velja

$$F'(x) = f(x)$$

za vse $x \in \mathcal{D}$, potem F imenujemo nedoločeni integral ali primitivna funkcija funkcije f.

Pišemo: $F(x) = \int f(x)\, dx.$

Povezava med odvodom ter integralom



Nedoločeni integral

Nedoločeni integral je določen le do konstante natanko. Če je $F'(x) = f(x)$, potem

- velja $(F(x) + C)' = f(x)$ za vse $C \in \mathbb{R}$,
- za vsak nedoločeni integral G funkcije f velja $G(x) = F(x) + D$ za nek $D \in \mathbb{R}$.

Elementarni integrali

Iz tabele elementarnih odvodov dobimo:

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 \qquad \int x^{-1} \, dx = \log|x| + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

Pravila za računanje nedoločenih integralov

1. linearnost:

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int \alpha f(x) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx$$

NI PRODUKTNEGA, KVOCIENTNEGA ALI VERIŽNEGA PRAVILA!!!

Izračunajmo integral

$$\int (1-x^2)^2 \, dx.$$

Pravila za računanje nedoločenih integralov

2. vpeljava nove spremenljivke:

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Izračunajmo integral

$$\int \frac{e^x}{1+2e^x}\,dx.$$

Izračunajmo integral

$$\int \frac{\cos(x)}{1+3\sin(x)}\,dx.$$

Izračunajmo integral

$$\int (x^5+x^4+e^x-1)^9(5x^4+4x^3+e^x)\,dx.$$

Pravila za računanje nedoločenih integralov

3. integriranje po delih (per partes)

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

oziroma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Izračunajmo integral

$$\int xe^{2x}\,dx.$$

Izračunajmo integral

$$\int (x^2+x)\sin(2x)\,dx.$$

Še primeri

1. $\int \sqrt{2x-5}\, dx$
2. $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$
3. $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$
4. $\int \frac{dx}{x+1}\, dx$
5. $\int \frac{dx}{x(x-1)}\, dx$
6. $\int \frac{dx}{(x^2+4)}\, dx$

Še primeri

8. $\int \frac{2x+1}{x^2+1}\, dx$
9. $\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}\, dx$
10. $\int \frac{2x^3+x+1}{x^2-1}\, dx$
11. $\int \log x\, dx$
12. $\int e^x \sin x\, dx$
13. $\int \tan x\, dx$
14. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

Definicija

Določeni integral pozitivne zvezne funkcije f na intervalu $[a, b]$ je ploščina območja med x-osjo in grafom $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
  Interval $[a, b]$ razdelimo na n intervalov enake dolžine $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$,
  $$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$
  vsak je širine $\delta_n = \dfrac{b-a}{n}$
- Za vsak $k = 0, 1, \ldots, n-1$ izberemo $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
- *Integralska vsota* funkcije f: $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\delta_n$.

Določeni integral

- Za zvezne funkcije velja, da zaporedje integralskih vsot konvergira, ko gre $n \to \infty$ in je limita vedno enaka, ne glede na to, kako izberemo točke c_k.
- *Določeni integral* funkcije $f(x)$ na $[a, b]$ je enak:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\delta_n$$

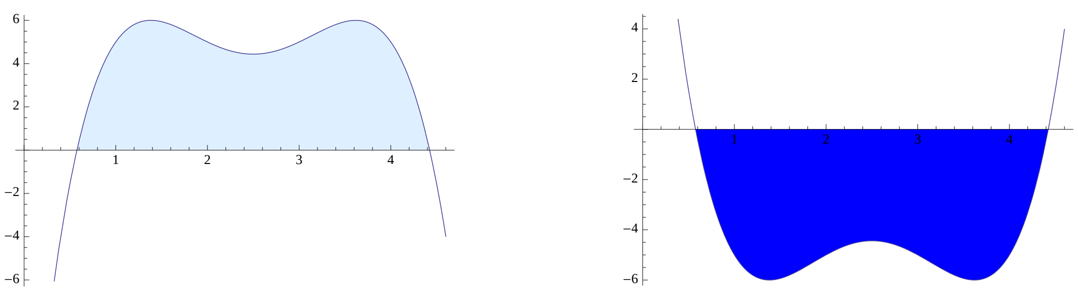
Zgled

Izračunajmo določeni integral funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$.

Zveza s ploščino

Naj bo P ploščina lika med grafom in intervalom $[a, b]$ na osi x.

- Če je $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a, b]$, je $P = \int_a^b f(x)\, dx$,
- če je $f(x) \leq 0$ na $[a, b]$, je $P = -\int_a^b f(x)\, dx$.

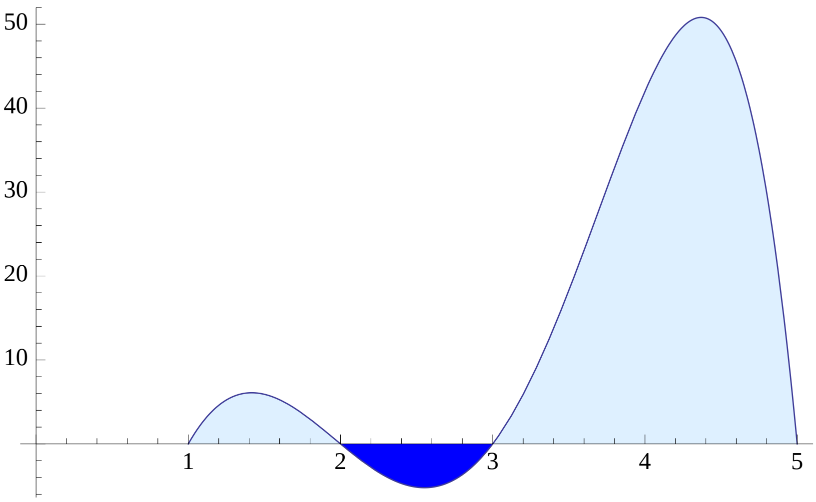


Zveza s ploščino

V splošnem je integral *predznačena ploščina*, tj.

$$\int_a^b f(x)\,dx = P_1 - P_2,$$

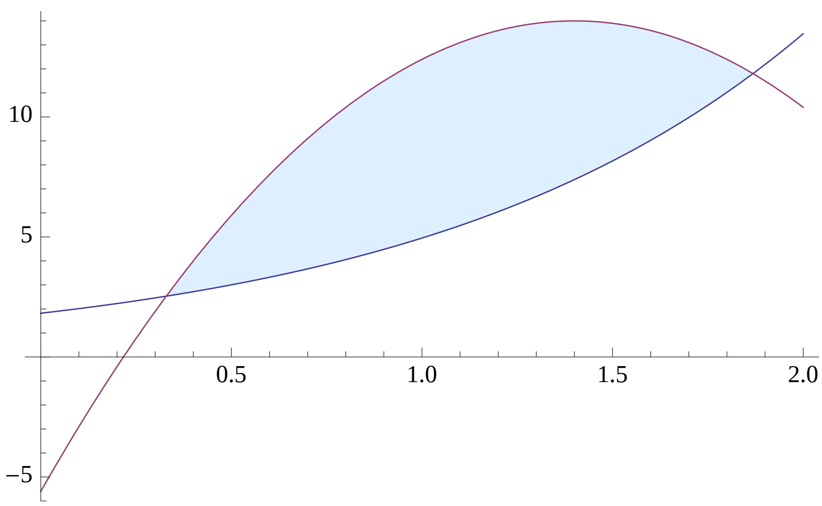
kjer je P_1 ploščina dela nad osjo x in P_2 ploščina dela pod osjo x.



Zveza s ploščino

Ploščina med grafoma $y = f(x)$ in $y = g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ za $x \in [a, b]$, je enaka

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



Primera

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}$
2. $\int_{-2}^{2} (2-|x|)\, dx$

Lastnosti določenega integrala

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna.

1. $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt$
2. $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$
3. $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
4. Linearnost:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx$$

Lastnosti določenega integrala

5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ za vse $c \in [a, b]$
6. Če je f liha, je $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.
7. Če je f soda, je $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
8. Monotonost: Če je $f(x) \leq g(x)$ na $[a, b]$, je

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Lastnosti določenega integrala

9. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
10. Če je $m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ in
$M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, je

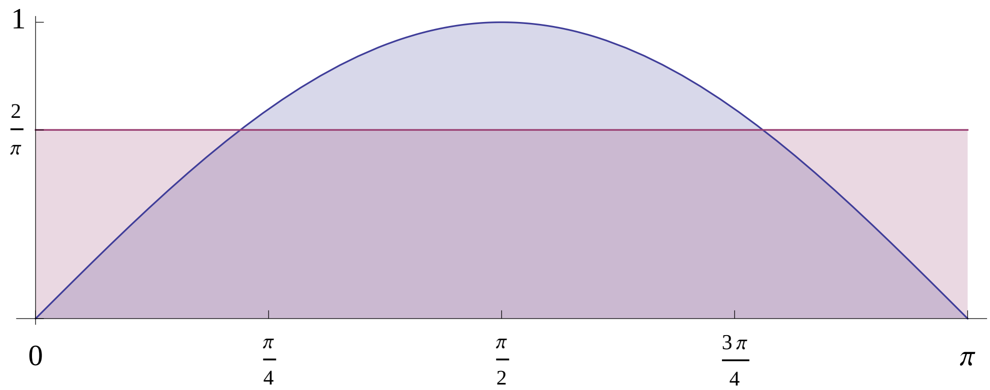
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Povprečna vrednost funkcije

Povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$ je

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

μ : višina pravokotnika z osnovnico $[a, b]$, ki ima ploščino enako kot območje pod grafom $y = f(x)$.



Zveza med določenim in nedoločenim integralom

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Torej je f je zvezna (in zato integrabilna) na vsakem intervalu $[a, x]$, $x \in [a, b]$.

Izrek (Osnovni izrek integralskega računa)

Če je f zvezna na $[a, b]$, je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

zvezna in odvedljiva na $[a, b]$ in velja

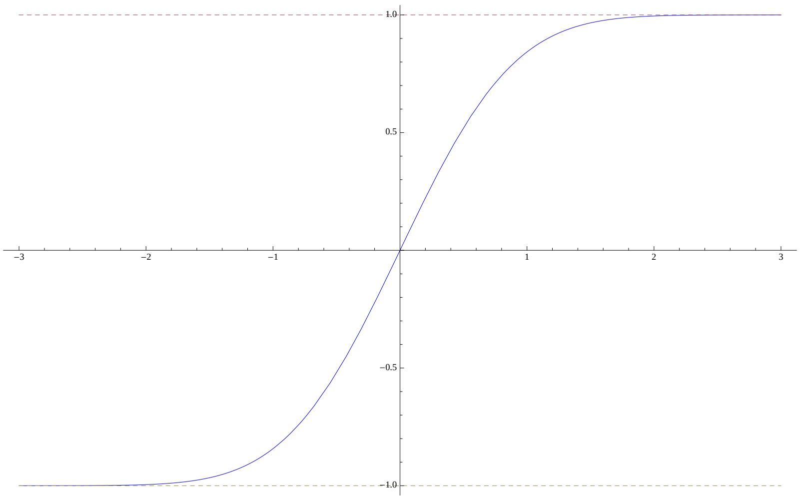
$$F'(x) = f(x).$$

Funkcija F je torej *nedoločeni integral* *funkcije f na $[a, b]$.*

Posledica

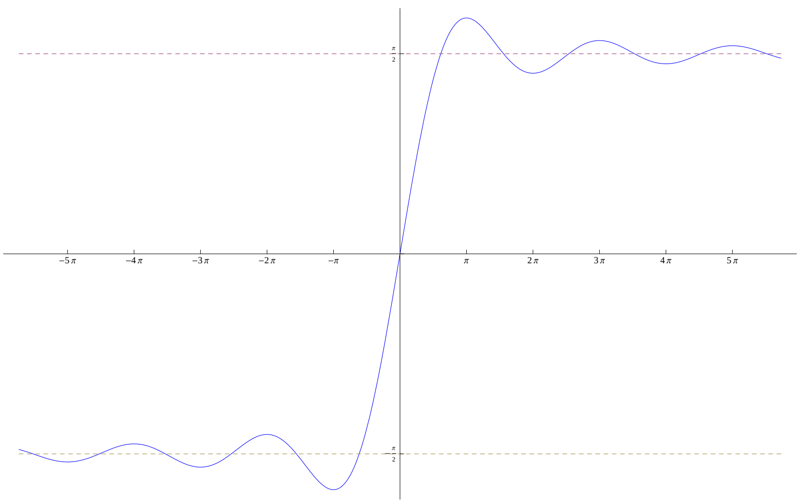
Vsaka zvezna funkcija ima svoj nedoločeni integral. Dobimo vrsto novih, neelementarnih funkcij, na primer:

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad \text{funkcija napake}$$



Posledice

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt \quad \text{integralski sinus}$$



Newton-Leibnizova formula

Newton-Leibnizova formula za računanje določenih integralov:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \big[F(x)\big]_a^b,$$

kjer je F nedoločeni integral funkcije f.

Pravila za računanje določenih integralov

Vpeljava nove spremenljivke

Če je u zvezno odvedljiva na $[a,b]$ ter f zvezna na $\mathcal{Z}_u$, potem je

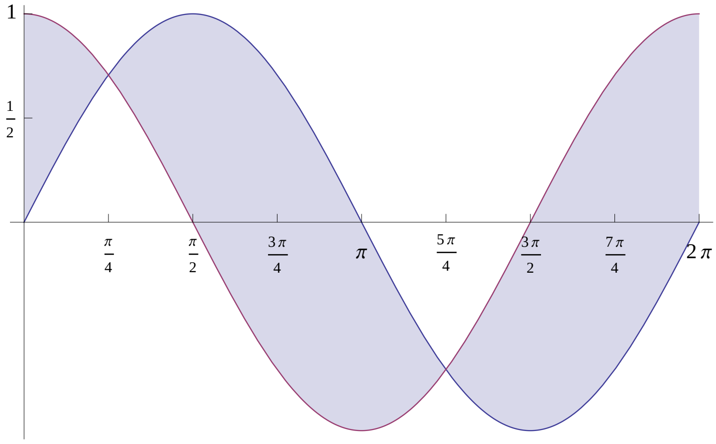
$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

Integriranje po delih: Če sta u, v odvedljivi na $[a,b]$, potem je

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

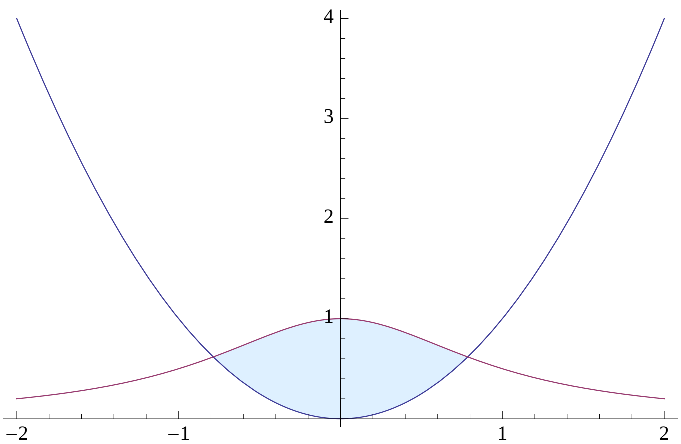
Primeri

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^2 x^4 \log x\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^3 |x^2-4|\,dx$
4. Določimo ploščino enega od likov med krivuljama $y = \sin x$ in $y = \cos x$.



Primeri

5. Določimo ploščino omejenega lika med krivuljama $y = x^2$ in $y = \frac{1}{1+x^2}$.



Uporaba integrala

- Ploščine likov omejenih s krivuljami ...
- Pot, hitrost, pospešek ter prehod med njimi.
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitivna funkcija. Naj bo T vrtenina, dobljena z vrtenjem grafa f okoli x osi na $[a, b]$.

$$\textit{prostornina:} \quad V(T) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$\textit{površina plašča:} \quad P(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

- Dolžina loka grafa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

- Akumulacija količine, če poznamo hitrost: pretok vode, pretok podatkov, absorbcija delcev, silo na pametni telefon,...

Integral na neomejenem intervalu

- $f(x)$ zvezna na $[a, \infty)$
- $\lim\limits_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\, dx = \int_a^\infty f(x)\, dx$
- Integral ne obstaja vedno!
- Podobno: $\lim\limits_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\, dx = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx$.

Primeri

1. $\displaystyle\int_1^\infty x^\alpha \, dx$
2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \, dx$
3. Gabrijelov rog dobimo z vrtenjem krivulje $y = 1/x$ na intervalu $[1, \infty)$ okrog osi x, pokažimo, da je volumen roga končen.