

Prvi izpit iz Numeričnih metod
28. januar 2020

[50 točk + 10 točk bonus] **Teoretična vprašanja**

1. Katere so osnovne računske operacije v IEEE in kateri dve operaciji sta problematični s stališča numerične matematike? Prikažite na primeru.
2. Kaj lahko povemo o stabilnosti računanja LU razcepa brez pivotiranja/z delnim pivotiranjem/s kompletnim pivotiranjem? Odgovor utemeljite.
3. Kaj pomeni red konvergence metode za reševanje nelinearne enačbe? Kako se red konvergence pozna pri dejanski uporabi metode? Od česa je odvisen red navadne iteracije?
4. Opišite Lagrangeovo obliko interpolacijskega polinoma in njene pomanjkljivosti.
5. Opišite idejo Runge-Kutta metod za reševanje diferencialnih enačb. Kakšne oblike je napaka metode reda k ?

Bonus Kaj je QR iteracija in zakaj se uporablja?

[50 točk + 10 točk bonus] **Praktična vprašanja**

1. **Reševanje sistemov linearnih enačb** Dana je obrnljiva bidiagonalna matrika

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ b_1 & a_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Sestavite učinkovit algoritem za izračun inverza matrike A in preštejte število operacij. (Namig: inverz je spodnje trikotna matrika, ki ni bidiagonalna.)

2. **Reševanje nelinearnih enačb** $f_1(x) = x^2 - a$, $f_2(x) = x - \frac{a}{x}$, imata ničli $x_{1,2} = \pm \sqrt{a}$. Določi iteracijski funkciji tangentne metode, ki jo prirediš tako definiranim funkcijam, in analiziraj red konvergence za vsako od njih.
3. **Interpolacija.** Dana je funkcija $f(x) = xe^{x-1}$, kjer je $x \in \mathbb{R}$. Poiščite interpolacijski polinom p stopnje 3 v Newtonovi obliki, ki zadošča

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1).$$

4. **Integracija.** Naj bo f integrabilna funkcija, $a < b$ realni števili in $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + 2h$, $x_2 = b$ delilne točke intervala $[a, b]$, pri čemer je $h = \frac{b-a}{3}$. Po metodi nedoločenih koeficientov izpeljite pravilo za izračun $\int_a^b f(x)dx$ na delilnih točkah x_0, x_1, x_2 . Določite tudi napako integracije.

Bonus **Predoločeni sistemi** Dane so točke $(-1, -2)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, -3)$. Poiščite funkcijo oblike

$$f(x) = a_1x + a_2x^2,$$

ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilaga danim točkam.