

[50 točk + 10 točk bonus] **Teoretična vprašanja**

1. Kaj je relativno direktno stabilna metoda in kaj relativno obratno stabilna metoda? Navedite primer metode, ki je relativno obratno, ne pa tudi direktno stabilno in napišite kratko idejo dokaza.
2. Kaj je pogojenostno število matrike? Kako je pogojenostno število povezano s stabilnostjo reševanja sistemov z eno od direktnih metod?
3. Izpeljite in opišite metodo regula-falsi za iskanje ničel nelinearnih funkcij.
4. Kaj so vozli in kaj uteži v kvadrurnem pravilu? V čem so Gaussova kvadrurna pravila boljša od Newton-Cottesovih?
5. Opišite idejo ABM prediktor-korektor metode za reševanje diferencialnih enačb. Koliko je napaka metode reda  $k$ ?

Bonus Kaj je dominantna lastna vrednost? Kako numerično iščemo dominantno lastno vrednost?

[50 točk + 10 točk bonus] **Praktična vprašanja**

1. **Reševanje sistemov linearnih enačb** Dana je realna zgornja Hessenbergova matrika, tj.  $a_{ik} = 0$  za  $i > k + 1$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \ddots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Sestavite učinkovit algoritem za izračun LU razcepa matrike  $A$  in preštejte število operacij.

2. **Reševanje nelinearnih enačb** Dana je funkcija  $g(x) = \frac{1}{3}\left(11 - \frac{6}{x}\right)$ .
  - (a) Poiščite negibni (fiksni) točki funkcije  $g$ .
  - (b) Določite privlačno in odbojno negibno točko pri navadni iteraciji s funkcijo  $g$ .
  - (c) S pomočjo konvergenčnega izreka za navadno iteracijo določite interval okoli privlačne točke  $\alpha$  iz (b), iz katerega za vsak začetni približek  $x_0$  zaporedje  $x_{r+1} = g(x_r)$ ,  $r \geq 0$ , konvergira proti  $\alpha$ .
  - (d) Naj bo  $x_0 = \alpha - 1$ . Naredite korak navadne iteracije z  $g$ .

3. **Interpolacija.**

- (a) Poiščite interpolacijski polinom  $p$  stopnje 4 v Newtonovi obliki, za katerega velja

$$p(-1) = 1, p'(-1) = 3, p(1) = -1, p'(1) = 1, p(2) = -2.$$

- (b) S Hornerjevim algoritmom izračunajte vrednost polinoma  $p$  v točki  $x = -2$ .

#### 4. Integracija.

- (a) S pomočjo sestavljenega Simpsonovega pravila iz 3 osnovnih pravil izračunajte približek za vrednost integrala

$$\int_0^2 \frac{1}{3 + \frac{x}{2}} dx.$$

- (b) Ocenite napako približka iz a).

Bonus **Predoločeni sistemi** Dane so točke  $(-1, -2)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, -3)$ . Poiščite funkcijo oblike

$$f(x) = a_1x + a_2x^2,$$

ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolj prilega danim točkam.