Linearna algebra **Teden 2**

Vektorji v $\mathbb{R}^3$, 2. del

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- *Skalarni produkt*
  - Definicija skalarnega produkta, video.
  - Lastnosti skalarnega produkta, video.
  - *Dolžina vektorja*, *enotski* vektor, primer, video.
  - Igrajte se sami z demonstracijo Wolfram demonstrations.
  - *Kot* med vektorjema, *pravokotnost* vektorjev, video.
  - Primer: Dane so točke $A(1, 2, 3)$, $B(2, 2, 1)$, $C(3, 1, c)$ v $\mathbb{R}^3$.
    (1) Določite koordinato c točke C tako, da bo $\triangle ABC$ pravokotni trikotnik s pravim kotom pri oglišču A.
    (2) Določite kot β pri oglišču B.
    (Rešitev).
  - ϟ Naloga 1: Naj vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ dolžin $||\vec{a}|| = 2$ in $||\vec{b}|| = 3$ oklepata kot $\frac{\pi}{4}$. Izračunajte skalarni produkt vektorjev $\vec{a} + \vec{b}$ ter $\vec{a} - \vec{b}$.
  - *Pravokotna projekcija*, video.
  - ϟ Naloga 2: V trikotniku z oglišči $A(1, 2, 3)$, $B(2, 2, 1)$ in $C(3, 1, 4)$ določite koordinate nožišča višine na stranico BC.
- *Vektorski produkt*
  - Definicija vektorskega produkta, primer in dve lastnosti, video.
  - Geometrijske lastnosti vektorskega produkta.
    * $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na $\vec{a}$ in na $\vec{b}$, video.
    * Dolžina vektorskega produkta $\vec{a} \times \vec{b}$ je enaka ploščini paralelograma, napetega na $\vec{a}$ in $\vec{b}$, video.
    * Smer vektorja $\vec{a} \times \vec{b}$ je določena s pravilom desnosučnega vijaka, oziroma pravilom desne roke: postavite iztegnjeno dlan v smeri prvega vektorja ($\vec{a}$), tako, da lahko pokrčite vse prste razen palce proti drugemu vektorju ($\vec{b}$). Če vam to uspe, potem palec kaže v smeri vektorskega produkta $\vec{a} \times \vec{b}$, video.
  - Igrajte se sami z demonstracijo Wolfram demonstrations.
  - ϟ Naloga 3: Uporabite definicijo vektorskega produkta, da za poljubne vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ ter $\alpha \in \mathbb{R}$ pokažete distributivnost

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

ter homogenost

$$\vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha\, \vec{a} \times \vec{b} = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b}$$

vektorskega produkta. (Dokaz je malce tehničen in ga je mogoče narediti tako, da zapišemo vsako od strani po komponentah.)

- *Enačba ravnine*
  - Izpeljava enačbe, video.
  - Primer: Napišite enačbo ravnine, ki poteka skozi točke $A(-1, 2, -1)$, $B(2, -1, 2)$, $C(0, 0, -1)$. (Rešitev.)
  - Igrajte se sami z demonstracijo Wolfram demonstrations.
  - ϟ Naloga 4: Naj bo Σ ravnina z normalo $\vec{n}$ in naj točka T_0 leži na ravnini Σ. Naj točka A **ne** leži na ravnini Σ.
    (1) Narišite skico.
    (2) Dopolnite poved: Razdalja točke A do ravnine Σ je enaka dolžini projekcije vektorja _________ na vektor _________.
    (3) Kako bi s pomočjo točk A, T_0 ter normale $\vec{n}$ izračunali kot med vektorjem $\overrightarrow{T_0A}$ in ravnino Σ?
    (4) Izračunajte razdaljo točke A do ravnine Σ.
    (5) Kaj vam pove predznak skalarnega produkta $\overrightarrow{T_0A} \cdot \vec{n}$ o legi točke A?
- *Mešani produkt*
  - Definicija mešanega produkta video.
  - ϟ Naloga 5: S pomočjo lastnosti skalarnega in vektorskega produkta pokažite, da velja

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}).$$

    (Pri tem se izognite računanju produktov po komponentah.)
  - Absolutna vrednost mešanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je enaka prostornini paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, video.
  - ϟ Naloga 6: Enotska vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot $\frac{\pi}{4}$. Izračunajte prostornino paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{a} - \vec{b}$ ter $\vec{a} \times \vec{b}$.
- Zapiski predavanj, 2. teden.

2. Kje si še lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Poglavje 1.
(2) Polona Oblak: Matematika, Poglavje 5.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 1.
(4) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Chapter 12.
(5) David Poole: Linear Algebra, a modern introduction, 2006, Chapter 1.
(6) 3Blue1Brown, Essence of linear algebra, Cross product

3. Ali razumem snov?

ϟ(1) Drži ali ne drži?

(a) Skalarni produkt poljubnih vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v $\mathbb{R}^3$, ki oklepata kot $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, je negativno število.
(b) Če je $\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}||\,||\vec{b}||$, potem sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna.
(c) Če sta premica p in ravnina Σ v $\mathbb{R}^3$ pravokotni, potem je vsak vektor na premici p vzporeden z normalo na ravnino Σ.
(d) Če sta $u, v \in \mathbb{R}^3$ neničelna vektorja, ki oklepata kot $\frac{\pi}{3}$, potem sta vektorja $\mathrm{proj}_u v$ in $\mathrm{proj}_v u$ nekolinearna.
(e) Ploščina paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}+\vec{b}$ ter $\vec{a}-\vec{b}$ je dvakratnik ploščine, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ ter $\vec{b}$.

ϟ(2) Če sta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ neničelna vektorja, kateri od naslednjih vektorjev so vedno pravokotni na vektor $\vec{a}$?

(a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$
(b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$
(c) $\mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$
(d) $\mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$
(e) $\vec{a} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$
(f) $\vec{b} - \mathrm{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$
(g) $\vec{a} - \mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$
(h) $\vec{b} - \mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$

ϟ(3) Naloga 4: Naj bosta $A(a, b, c)$ in $B(c, a, b)$ poljubni neničelni točki na ravnini $x + y + z = 0$. Izračunajte kot med krajevnima vektorjema točk A in B.

⋆ (4) Uporabite lastnosti skalarnega produkta, da za poljubna vektorja $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ pokažete trikotniško neenakost

$$||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||.$$

⋆ (5) Naj bodo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ poljubni vektorji v $\mathbb{R}^3$.
(a) Geometrijsko utemeljite, zakaj vektorski produkt ni asociativna operacija.
(b) Geometrijsko razmislite, zakaj je vektor $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
(c) Računsko pokažite, da velja formula o dvojnem vektorskem produktu

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}.$$

(d) Iz formule o dvojnem vektorskem produktu lahko izpeljete tudi enakost $||\vec{a} \times \vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2\,||\vec{b}||^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$.

ϟ(6) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Poglavje 1.

(Naloge, označene s ϟ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Nalogi, označeni s ⋆, dopolnjujeta obravnavano snov in širita vaše znanje.)