

Linearna metoda najmanjših kvadratov. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pokončna pravokotna matrika, t.j. A ima več vrstic kot stolpcev, $m \geq n$. Naj bo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ poljuben vektor. Kako bi poiskal pravokotno projekcijo vektorja \mathbf{b} na stolpčni prostor matrike A , $C(A)$? (Privzameš lahko, da so stolpci A linearno neodvisni, t.j. $\dim C(A) = n$.)

1. Realno funkcijo f želimo na intervalu $[a, b]$ aproksimirati s polinomom. To bomo (mogoče naivno) naredili tako, da bomo interval $[a, b]$ razdelili s $k + 1$ ekvidistantnimi točkami $a = x_0, x_1, \dots, x_k = b$ in poiskali koeficiente polinoma $p(x)$, ki se v smislu linearne metode najmanjših kvadratov najbolj prilaga podatkom v spodnji tabeli.

x_0	x_1	\dots	x_i	\dots	x_k
$f(x_0)$	$f(x_1)$	\dots	$f(x_i)$	\dots	$f(x_k)$

- (a) Naj bo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinom stopnje n . Zapiši matriko A in desno stran sistema \mathbf{b} , ki pripada podatkom iz zgornje tabele.
 - (b) Poišči aproksimacije s polinomi stopenj 0, 1 in 2 za funkcijo $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ na intervalu $[-1, 1]$, če uporabiš točke $x_0 = -1, x_1 = 0$ in $x_2 = 1$.
 - (c) Z uporabo octave-a poišči aproksimacije za $g(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ na intervalu $[-1, 1]$ s polinomi stopenj 0, 2, ..., 20, če interval $[-1, 1]$ razdeliš z 21 ekvidistantnimi točkami. Poišči aproksimacije za točne podatke in podatke z (umetno dodano) napako. Z uporabo ukaza `plot` nariši grafe originalne funkcije in vseh aproksimacij.
2. Uporabi linearno metodo najmanjših kvadratov še pri reševanju tega problema: V ravnini \mathbb{R}^2 imamo na znanih položajih $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)$ postavljenih n oddajnikov. Določiti želimo položaj (x, y) sprejemnika. Sprejemnik lahko zazna le jakost signala posameznih oddajnikov in na podlagi tega določi razdalje d_1, \dots, d_n do teh oddajnikov. V idealiziranem primeru (ko so naši podatki točni) imamo za vsak $i = 1, \dots, n$ enačbo

$$(x - p_i)^2 + (y - q_i)^2 = d_i^2.$$

Rešitev sistema teh enačb za $i = 1, \dots, n$ pa nam da položaj sprejemnika (x, y) .

- (a) Prva težava: zgornje enačbe *niso* linearne. Razlika vsakih dveh zaporednih enačb pa je linearna enačba. Poišči te razlike in zapiši ustrezen sistem $n - 1$ linearnih enačb.
- (b) Zapiši matriko leve strani tega sistema $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 2}$ ter desno stran tega sistema $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Druga težava: Ker podatki *niso* točni, predoločen sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ skoraj gotovo nima rešitev.
- (c) Poišči rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ po linearni metodi najmanjših kvadratov. Napiši octave funkcijo `X = sprejemnik([pi, qi], [di])`, ki za nabor položajev oddajnikov (p_i, q_i) in razdalj d_i poišče položaj sprejemnika $X(x, y)$. (Podatki (p_i, q_i) so dani v eni $n \times 2$ matriki, d_i pa v stolpcu višine n . Rezultat

X naj bo vrstica dolžine 2; $X = [x, y]$.) V funkcijo vključi tudi ustrezne *teste*, da preveriš pravilnost delovanja.

- (d) Delovanje preveri še z umetnimi podatki iz datotek `odda_jniki.txt` in `razdalje.txt` na spletni učilnici. V octave jih lahko uvoziš z ukazom `load`. Grafično prikaži rezultate.