Linearna algebra **Teden 4**

Obrnljivost matrik in njihovi inverzi

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Lastnosti matričnega množenja, video. Spoznali boste naslednje.
  - *Identična matrika*
  $$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$
  velikosti $n \times n$ je matrika, za katero velja $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$ za vsako $m \times n$ matriko A.
  - Matrično množenje je asociativno:
  $$A(BC) = (AB)C$$
  za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times r}$.
  - Matrično množenje je distributivno. Velja
  $$A(B + C) = AB + AC \text{ in } (A + D)C = AD + DC$$
  za $A, D \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$.
  - *Potence* matrik. Za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiramo
  $$A^0 = I_n$$
  $$A^k = A \cdot A^{k-1}$$
  - Kako matriko razbijemo na bloke in kako bločno množimo matrike.
  - Linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ je rešljiv natanko tedaj, ko je $\vec{b}$ linearna kombinacija stolpcev matrike A.
  - ↯ Naloga 1, če je prejšnji teden še niste rešili. Zapišite primere
    (1) neničelnih matrik A in B za katere je $AB = 0$ (s tem ste pokazali, da se lahko neničelni matriki zmnožita v ničelno),
    (2) neničelnih matrik C in D za katere je $CD \neq DC$ (s tem ste pokazali, da množenje matrik ni komutativno),
    (3) neničelnih matrik E, F in G za katere je $EG = FG$, a $E \neq F$ (s tem ste pokazali, da v matričnih enakostih ne morete krajšati skupnega faktorja),
- *Inverz* matrike.
  - Definicija, video.
  - Računanje inverza, video. V njem boste spoznali:

* Algoritem za računanje inverza kvadratne matrike: Inverz obrnljive matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s pomočjo Gaussovih elementarnih operacij izračunamo na naslednji način:
  (1) Zapišemo zelo razširjeno matriko
  $$[A \mid I_n] \in \mathbb{R}^{n\times 2n},$$
  (2) nato na njej izvajamo Gaussove elementarne operacije.
    (a) V kolikor $\mathrm{rank}(A) < n$, matrika A ni obrnljiva in njen inverz ne obstaja.
    (b) Če je $\mathrm{rank}(A) = n$, potem izvajamo Gaussove elementarne operacije toliko časa, da na prvih n stolpcih pridobimo identično matriko I_n
    $$[A \mid I_n] \sim \ldots \sim [I_n \mid B].$$
    Inverz matrike A je enak $A^{-1} = B$.
* *Diagonalna matrika* je kvadratna matrika, ki ima vse izvendiagonalne elemente enake 0.
* *Zgornje trikotna matrika* ima vse elemente pod diagonalo enake 0. Inverz zgornje trikotne matrike je zgornje trikotna matrika.

↯ Naloga 2: *Spodnje trikotna matrika* ima vse elemente nad diagonalo enake 0. Transponiranka spodnje trikotne matrike je zgornje trikotna matrika. Utemeljite, da je inverz spodnje trikotne matrike prav tako spodnje trikotna matrika.

↯ Naloga 3: Izračunajte inverz 3×3 spodnje trikotne matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}.$$

– Lastnosti in uporaba, video.
  * Če je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potem so naslednje trditve ekvivalentne:
    (1) A je obrnljiva.
    (2) $\mathrm{rank}(A) = n$.
    (3) Homogeni sistem $A\vec{x} = \vec{0}$ ima le trivialno rešitev.
    (4) Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ natanko eno rešitev.
  * Za obrnljivi matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja
    (1) $(A^{-1})^{-1} = A$,
    (2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

  ↯ Naloga 4: Če sta kvadratni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi in velja $(AB)^2 = A^2B^2$, potem pokažite, da matriki A in B komutirata ($AB = BA$).

– Inverz transponirane matrike (in transponiranka produkta matrik), video.

• Zapiski predavanj, 4. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 2.3.
(2) Polona Oblak: Matematika, Razdelek 6.3.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 2.5.
(4) David Poole: Linear Algebra, a modern introduction, 2006, Sections 3.1, 3.2., 3.3..

3. Ali razumem snov?

ϟ(1) Drži ali ne drži?
- (a) Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi matriki. Za vsako $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima enačba $AXB^{-1} = C$ natanko eno rešitev.
- (b) Za vsako 4×4 matriko, ki ima zadnjo vrstico enako prvi, velja, da ni obrnljiva.
- (c) Vsaka zgornje trikotna matrika je obrnljiva.
- (d) Če je matrika A obrnljiva, ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ neskončno rešitev.
- (e) Če je vektor $\vec{b}$ pravokoten na vse stolpce matrike A, potem je sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ rešljiv.
- (f) Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljiva. Ali obstaja <u>obrnljiva</u> matrika $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za katero velja $AXA + A = 0$?

ϟ(2) Če sta A in B obrnljivi $n \times n$ matriki, katere od naslednjih trditev so resnične?
- (a) $(A^{-1})^{-1} = A$
- (b) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$
- (c) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- (d) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$
- (e) AB je obrnljiva
- (f) $A + B$ je obrnljiva

ϟ(3) Kdaj je 2×2 matrika
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
obrnljiva? V primeru, ko je obrnljiva, kaj je njen inverz A^{-1}?

ϟ(4) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 31-35, 40-42.