Linearna algebra	**Teden 5**

Vektorski prostor in podprostor

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- *Vektorski prostor*
  - Uvod, video.
  - Definicija abstraktnega realnega vektorskega prostora, video.
  - Štirje primeri vektorskih prostorov in dva neprimera, video. Vsekakor si morate zapomniti in dobro poznati naslednje tri:
    - $\mathbb{R}^n \ldots$ vektorji z n komponentami
    - $\mathbb{R}^{m\times n} \ldots m \times n$ matrike
    - $\mathbb{R}_n[x] \ldots$ polinomi spremenljivke x z realnimi koeficienti, ki so stopnje največ n
    - ↯ Naloga 1: Za polinoma

      $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ in}$$
      $$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

      $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, stopnje največ n, definirajmo njuno vsoto kot

      $$(p+q)(x) = (a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$$

      in večkratnik polinoma p kot

      $$(\alpha p)(x) = (\alpha a_n)x^n + (\alpha a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0),$$

      $\alpha \in \mathbb{R}$. Preverite, da je množica polinomov $\mathbb{R}_n[x]$ s tako definiranima operacijama res vektorski prostor. (Da, zares preverite, da sta vsota in večkratnik zopet polinoma stopnje največ n ter da velja vseh sedem lastnosti, ki jih morata operaciji imeti. Ne pozabite razmisliti, kaj je ničelni polinom in kaj je nasprotni polinom danega polinoma.)
  - Lastnosti vektorskega prostora, video. Spoznali boste
    - kaj so *linearne kombinacije* vektorjev vektorskega prostora V. (In da, definicija je natanko posplošitev linearne kombinacije vektorjev v $\mathbb{R}^n$ ali linearne kombinacije matrik v $\mathbb{R}^{m\times n}$, kot jo že poznate.)
    - da je ničelni večkratnik poljubnega vektorja ničelni vektor.
    - ↯ Naloga 2: Pokažite, da je poljuben večkratnik ničelnega vektorja ničelni vektor. (Namig: to naredite s podobno zvijačo kot smo dokazali prejšnjo trditev.)
- *Vektorski podprostor*
  - Podmnožica vektorskega prostora, video.
  - Definicija vektorskega podprostora, video.

  - $*$ Primer: Ali je množica $\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & -y & -x \end{bmatrix}^\mathsf{T};\ x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$? (Rešitev.)
- – Ekvivalentna definicija vektorskega podprostora, video.
  - $*$ Primer: Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *simetrična*, če velja $A = A^\mathsf{T}$. S $\mathcal{S}_n$ označimo množico vseh $n \times n$ simetričnih matrik. Pokažite, da je $\mathcal{S}_n$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$. (Rešitev.)
  - ↯ Naloga 3: Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dana matrika. Ali je množica vseh realnih $n \times p$ matrik X, za katere velja $AX = 0$, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times p}$?
  - $*$ Prejšnja naloga vam v primeru, ko je $p = 1$, pove, da je za dano matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ množica

$$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n;\ A\vec{x} = \vec{0}\}$$

    vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. Ta prostor imenujemo *ničelni prostor* matrike A (in je zelo pomemben prostor, ki ga bomo srečevali skozi cel semester).
  - $*$ Primer: Izračunajte ničelni prostor matrike $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. (Rešitev.)
  - $*$ Dva neprimera vektorskih podprostorov:
    - · Utemeljite, zakaj množica $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \end{bmatrix}^\mathsf{T};\ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ <u>ni</u> vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.
    - · Utemeljite, zakaj množica $\mathcal{C} = \{A \in \mathbb{R}^{m\times n};\ \operatorname{rank}(A) \leq 2\} \subseteq \mathbb{R}^{m\times n}$ <u>ni</u> vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{m\times n}$.
    - · (V kolikor niste prepričani v svojo rešitev, si lahko pogledate nekaj možnih utemeljitev tukaj: rešitev.)
  - ↯ Naloga 4: Kaj mora veljati za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, da bo ravnina Σ v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $ax + by + cz = d$, vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$?
- – *Linearna ogrinjača*, definicija in primeri, video.
- • Zapiski predavanj, 5. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Polona Oblak: Vektorski prostor in podprostor, Poglavje 1.
(2) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 3.1.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 3.1.
$\star$ (4) (Za zahtevnejše bralce) Vektorski prostor lahko definirate tudi bolj algebraično. Pokukajte v učbenik Tomaža Koširja: Linearna algebra, za definicijo in lastnosti vektorskih prostorov poglejte v poglavje VI. Večino pojmov, ki so vam tuji, boste našli v poglavju V.

3. Ali razumem snov?

$\lightning$(1) Drži ali ne drži?
   (a) Množica vseh zgornje trikotnih $n \times n$ matrik je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.
   (b) Množica vseh 3×3 matrik z vsemi diagonalnimi elementi enakimi 0 je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{3\times 3}$.
   (c) Množica vseh 4×4 matrik, ki imajo vse vrstice enake, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{4\times 4}$.
   (d) Ravnina v $\mathbb{R}^3$, podana z enačbo $x + 2y + 3z = 4$, je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^3$.
   (e) Če so $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno odvisno vektorji, potem je linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{x, y, z\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče.
   (f) Če je simetrična matrika obrnljiva, potem je tudi njen inverz simetrična matrika.

$\lightning$(2) Katere od naslednjih množic so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^n$?
   (a) Vsi vektorji dolžine 1.
   (b) Vsi vektorji, ki so pravokotni na vektor $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
   (c) Vsi vektorji, ki niso kolinearni vektorju $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
   (d) Vsi vektorji, ki so kolinearni vektorju $[1,\ 2,\ 0,\ \ldots, 0]^T$.
   (e) Vsi vektorji, katerih prva komponenta je neničelna.
   (f) Vsi vektorji, katerih prva komponenta je ničelna.

$\lightning$(3) Katere od naslednjih množic realnih $n \times n$ matrik so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^{n\times n}$?
   (a) Matrike, ki imajo prvo vrstico ničelno.
   (b) Matrike, ki imajo vsoto elementov v vsaki vrstici enako 1.
   (c) Vse matrike C, za katere velja $C^2 = I$.
   (d) Vse matrike D, ki so rešitve sistema $Dx = 0$.
   (e) Vse matrike, katerih elementi so nenegativna realna števila.
   (f) Vse matrike F, za katere velja $F = F^T$.
   (g) Vse matrike G, za katere velja $G = -G^T$.
   (h) Vse matrike H, za katere velja $\operatorname{rank} H = n$.
   (i) Vse matrike, katerih vse vrstice so med seboj enake.
   (j) Vse matrike X, katerih produkt z vnaprej dano matriko J je enak ničelni matriki.

$\lightning$(4) Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor.
   (a) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^{\mathsf{T}}$ simetrična matrika.
   (b) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^{\mathsf{T}}$ matrika ranga 1.

$\lightning\lightning$(5) Naj bo V vektorski prostor ter $U, W \subseteq V$ vektorska prostora v V. Pokažite, da je tudi $U \cap W$ vektorski prodprostor v V.

$\lightning$(6) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 55 (a,b), 59(a), 68 (a).

(Naloge, označene s $\lightning$ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Naloga, označena s $\lightning\lightning$ pa je malce bolj zahtevna.)