Linearna algebra	**Teden 6**

Vektorski prostor, linearna neodvisnost in baze

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Kot uvod v teden si poglejte 3Blue1Brown, Essence of linear algebra, Linear combinations, span, and basis vectors. Nekatere reči že znate, preostale se boste naučili danes.
- Še enkrat si oglejte (lahko kar na dvakratni hitrosti) definicijo ničelnega prostora in primer prejšnjega tedna, ki se bo navezoval na današnje definicije, video.
- *Linearna neodvisnost*
  - Definicija, video.
  - Primer: Ali so matrike $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ linearno neodvisne? (Poskusite najprej sami. Če ne gre, je tu rešitev.)
  - Primer: Ali so matrike $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ linearno neodvisne? (Sedaj pa že znate recept. Zares najprej naredite sami. Zgolj zato, da preverite svojo rešitev, imate tu še mojo.)
  - Še en pomemben zgled linearne odvisnosti, video.
  - ϟ Naloga 1: Naj bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ linearno neodvisni. Pokažite, da so linearno neodvisni tudi vektorji $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{b}+\vec{c}$ in $\vec{c}$.
- *Baza vektorskega prostora*
  - Definicija, video.
  - Primer, video1 + video2.
  - Lastnosti baze:
    - Vsak vektorski prostor ima neskončno baz.
    - Vse baze vektorskega prostora imajo enako število elementov.

    Število elementov v (katerikoli) bazi vektorskega prostora V imenujemo *dimenzija* vektorskega prostora V, video.

    Dimenzija vektorskega prostora V je torej:
    - največje število linearno neodvisnih vektorjev, ki jih lahko najdemo v V,
    - najmanjše število vektorjev, ki jih potrebujemo da bo V njihova linearna ogrinjača.

    video.
  - V vektorskem prostoru V z izbrano bazo $\mathcal{B}$ lahko vsak vektor izrazimo na en sam način kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{B}$, video.
  - Primer: Napišite, kaj so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^3$ dimenzije 1, 2 ali 3. (Rešitev)

  - *Standardne baze* v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, video.
  - ϟ Naloga 2: Naj bo U linearna ogrinjača vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Ali vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tvorijo bazo prostora U?
- *Stolpčni prostor*, definicija in primer, video.
- Rang matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je enak:
  - številu neničelnih vrstic v vrstično stopničasti obliki matrike A,
  - številu pivotov v vrstično stopničasti obliki matrike A,
  - številu linearno neodvisnih vrstic matrike A,
  - številu linearno neodvisnih stolpcev matrike A,
  - dimenziji stolpčnega prostora $C(A)$ matrike A,
  - $\operatorname{rang} A = n - \dim N(A)$.

  Argumente najdete v videu.
- ϟ Naloga 3: Iz prejšnje točke sledi

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^{\mathsf{T}}.$$

  Zakaj? (Za utemeljitev zadošča ena (prava) poved.)
- ϟ Naloga 4: Naj bo A neničelna matrika velikosti 3×8 in $d = \dim N(A)$. Zapišite vse možne vrednosti števila d.
- Iz vsega, kar ste se naučili v zadnjih štirih tednih tako sledi, da so naslednje trditve o matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ekvivalentne:
  (1) A je obrnljiva.
  (2) Homogeni sistem enačb $Ax = 0$ ima le trivialno rešitev $x = 0$.
  (3) Sistem enačb $Ax = b$ ima enolično rešitev za vsak $b \in \mathbb{R}^n$.
  (4) Reducirana vrstična stopničasta oblika matrike A je I.
  (5) Rang matrike A je n.
  (6) Stolpci matrike A so linearno neodvisni.
  (7) Vrstice matrike A so linearno neodvisne.
  (8) Stolpci matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.
  (9) Vrstice matrike A razpenjajo $\mathbb{R}^n$.
  (10) Stolpci matrike A so baza $\mathbb{R}^n$.
  (11) Vrstice matrike A so baza $\mathbb{R}^n$.
  (12) $\dim N(A) = 0$.
  (13) $\dim C(A) = n$.
- Zapiski predavanj, 6. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Polona Oblak: Vektorski prostor in podprostor.
(2) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 3.4. poglavje VI.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 3.
(4) Gilbert Strang, Video Lectures:
  (a) Lecture 6: Column space and nullspace.
  (b) Lecture 9: Independence, basis, and dimension.
⋆ (5) (Za zahtevnejše bralce) Tomaž Košir: Linearna algebra,

3. Ali razumem snov?

ϟ(1) Naj bodo $S_1, S_2, \ldots, S_6$ linearno neodvisne simetrične 3×3 matrike. Pokažite, da tvorijo bazo vektorskega prostora simetričnih 3×3 matrik.

ϟ(2) Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{7\times 4}$ štiri linearno neodvisne vrstice. Koliko rešitev ima lahko linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$?

ϟ(3) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrika, katere stolpci so linearno neodvisni. Izračunajte $\dim N(A)$.

ϟ(4) Če je $A \in \mathbb{R}^{7\times 11}$ matrika ranga 5, izračunajte $\dim N(A)$.

ϟ(5) Drži ali ne drži?
- (a) Vsaka linearno neodvisna množica vektorjev v $\mathbb{R}^9$ vsebuje vsaj 9 elementov.
- (b) Če sta prvi in drugi stolpec matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ linearno odvisna vektorja, potem matrika A ni obrnljiva.
- (c) Če so $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno odvisno vektorji, potem je linearna ogrinjača $\mathcal{L}\{x, y, z\}$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ skozi koordinatno izhodišče.
- (d) Vsaka baza prostora $\mathbb{R}^{2\times 4}$ ima največ 4 elemente.
- (e) Če za matriki $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja $\dim N(A) \leq \dim N(B)$, potem je $\dim C(A) \geq \dim C(B)$.

ϟ(6) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 55, 57 (a) in (b), 60-64.