Linearna algebra	**Teden 9**
Ortogonalnost, 1. del	
	Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Napovednik 5. poglavja: Ortogonalnost.
- Uvod
  - Ponovite skalarni produkt z ogledom 3Blue1Brown, scalar product.
  - Za definicijo pravokotnosti/ortogonalnosti potrebujemo skalarni produkt. Primeri skalarnih produktov, ki jih boste kdaj potrebovali: video.
- Definicije *pravokotnih/ortogonalnih* vektorjev, *ortogonalne množice* vektorjev, *ortonormirane množice* vektorjev, video.
  - Vsaka ortogonalna množica vektorjev je linearno neodvisna. video.
  - ϟ Naloga 1: Ali je množica vektorjev

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

    ortonormirana množica v $\mathbb{R}^4$?
- *Ortonormirana baza*
  - Definicija in lastnosti, video
  - Primer:
    (a.) Ali je množica vektorjev $\mathcal{M}$ iz naloge 1 ortonormirana baza $\mathbb{R}^4$?
    (b.) Ali lahko poiščete množico $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^4$, ki bo tvorila ortonormirano bazo $\mathbb{R}^4$ in bo sestavljena iz večkratnikov vektorjev množice $\mathcal{M}$?
    (c.) Zapišite vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{N}$.

    (Ko rešite, lahko preverite rešitev tu.)
  - ϟ Naloga 2: Naj bo $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_5}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}^5$ in $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v_1} + \ldots + \alpha_5 \vec{v_5}$. Pokažite, da je $||\vec{x}||^2 = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_5^2$.
- *Gram-Schmidtov postopek* za ortogonalizacijo vektorjev:
  - Ideja
  - Postopek
  - Gram-Schmidtov postopek je odvisen od vrstnega reda vektorjev. Oglejte si primer in še enkrat isti primer z menjavo vrstnega reda vhodnih vektorjev.

ϟ Naloga 3: Naj bo

$$V = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Poiščite kakšno ortonormirano bazo prostora V. (Najprej z metodo ostrega očesa ugotovite, v kakšnem vrstnem redu boste izvajali Gram-Schmidtov postopek.)

– Igrajte se z Wolframovo demonstracijo.

- *Ortogonalni komplement*
  - Definicija
  - ϟ Naloga 4: Pokažite, da je ortogonalni komplement $U^\perp$ vektorskega podprostora $U \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$.
  - Lastnosti
  - Ortogonalna zveza med ničelnim in stolpčnim prostorom matrike
  - ϟ Naloga 5: Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times(n+k)}$ matrika ranga r, $r \leq n$, $k \geq 0$. Določite dimenzije prostorov $C(A)$, $C(A^\top)$, $C(A)^\perp$, $N(A)$, $N(A^\top)$ in $N(A)^\perp$.
- Zapiski predavanj, 9. in 10. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelka 4.1. in 4.4.4.
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Sections 4.1, 4.4.
(3) Gilbert Strang, Video Lectures:
  (a) Lecture 14: Orthogonal vectors and subspaces.
  (b) Lecture 17: Orthogonal matrices and Gram-Schmidt, od 25:06 dalje.

3. Ali razumem snov?

ϟ (1) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ takšna matrika, da velja $\dim N(A) = \dim N(A^T)$. Pokažite, da velja $m = n$.

ϟ (2) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.
  (a) Če je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ ortogonalna množica v vektorskem prostoru V dimenzije 7 in v_i neničelni vektorji, potem je $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ baza prostora V.
  (b) Za simetrično matriko A velja $N(A) = C(A)^\perp$.
  (c) Če ima za neka $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ rešitev, potem je vektor $\vec{b}$ pravokoten na vsak vektor $\vec{y} \in N(A^T)$.
  (d) Vektorski podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ je ortogonalni komplement vektorskega prostora $W \subseteq \mathbb{R}^n$, če je vsak vektor iz V pravokoten na vsak vektor iz W.

ϟ (3) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 65–68, 72, 74–78, 80, 82–84.

⋆ (4) Na vektorskem prostoru $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ zveznih funkcij na intervalu $[-\pi,\pi]$ definirajmo predpis

(1)
$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

ki funkcijama f in g vrne število $\langle f, g\rangle \in \mathbb{R}$.

(a) Pokažite, da je
   (i) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$,
   (ii) $\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$,
   (iii) $\langle f, f\rangle \geq 0$ ter
   (iv) da je $\langle f, f\rangle = 0$ natanko tedaj, ko je f ničelna funkcija.

   S tem ste pokazali, da je predpis (1) skalarni produkt na prostoru zveznih funkcij na intervalu $[-\pi,\pi]$.

(b) Dolžino funkcije f definiramo kot

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx}$$

   norma (ali dolžina) funkcije f. Označimo funkcije

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ f_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(ix) \\ g_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(ix) \end{aligned}$$

   za $i = 1, 2, \ldots$.

(c) Pokažite, da je
   (i) $\langle f_i, f_i\rangle = 1$ za $i = 0, 1, 2, \ldots$,
   (ii) $\langle g_i, g_i\rangle = 1$ za $i = 1, 2, \ldots$,
   (iii) $\langle f_0, f_i\rangle = 0$ za $i = 1, 2, \ldots$ in
   (iv) $\langle f_i, g_j\rangle = 0$ za $i = 0, 1, 2, \ldots$ ter $j = 1, 2, \ldots$.

   S tem ste pokazali, da so funkcije $\{f_0, f_1, f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots\}$ ortonormirana množica v $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$. Ta igra pomembno vlogo pri Fourirjevih vrstah in transformacijah.

(Naloge, označene s ϟ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Naloga, označena s ⋆, dopolnjuje obravnavano snov in širi vaše znanje.)