Linearna algebra	**Teden 10**
Ortogonalnost, 2. del	
	Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Prejšnji teden je bil namenjen spoznavanju ortogonalnih vektorjev in baz. V tem tednu pa se boste spoznali z matrikam, ki imajo ortonormirane stolpce in njihovo uporabo (zato bo ta teden več praktičnih in manj teoretičnih nalog):
  - Matrike z ortonormiranimi stolpci, matrika projekcije, video.
  - Primer: Dana je ravnina $\Sigma : x+y+2z = 0$ v $\mathbb{R}^3$. Zapišite matriko P, ki pripada pravokotni projekciji na Σ v standardni bazi. Lahko sledite naslednjim korakom:
    (1) Izberite ortonormirano bazo $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ ravnine Σ. (Če ne znate uganiti, izberite poljubna linearno neodvisna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ na ravnini Σ in na njima uporabite Gram-Schmidtov postopek.)
    (2) Naj bo $Q \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ matrika s stolpcema $\vec{w}_1$ in $\vec{w}_2$.
    (3) Matrika projekcije na Σ je $P = QQ^\top$.

    (Če se vam v kakšnem koraku zatakne, lahko pogledate pomoč. Pri tem ne sledite slepo moji izbiri vektorjev. Ne glede na to, kako boste izbrali začetna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, bi morali na koncu priti do iste matrike P. Poskusite.)
  - *Ortogonalna matrika*, video.
  - ↯ Naloga 1: Če je $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalna matrika, potem pokažite, da je

    $$||Q\vec{x}|| = ||\vec{x}||$$

    za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- *QR razcep* matrike
  - Razcep, video.
  - Primer: Poiščite QR razcep matrike $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (Rešitev.)
  - Nadaljnje variante QR razcepa, video.
- *Predoločeni sistemi*
  - Kaj so sploh predoločeni sistemi? video.
  - Najboljši približek rešitve predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov, video.
  - Poglejte si lepšo in gibljivo sliko, kaj je najboljši približek predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov. Wolfram Demonstrations Project.
  - Primer: Določite premico v $\mathbb{R}^2$, ki se najbolj prilega točkam $A(1,1)$, $B(0,0)$, $C(2,0)$ in $D(-1,2)$. (Rešitev.)
  - Kaj pa v primeru, ko je predoločeni sistem podan z matriko polnega ranga? video.

- Zapiski predavanj, 9. in 10. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Poglavje 4
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 4.
(3) Gilbert Strang, Video Lectures:
  (a) Lecture 15: Projections onto subspaces.
  (b) Lecture 16: Projection matrices and least squares.
  (c) Lecture 17: Orthogonal matrices and Gram-Schmidt

3. Ali razumem snov?

(1) Dani sta matriki

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \text{ in } Z_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

  $\lightning$ (a) Pokažite, da sta matriki A in B ortogonalni za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$.
  $\lightning$ (b) Kaj predstavljata linearni preslikavi $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}, \mathcal{Z}_{\frac{\pi}{2}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, podani z

$$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{x}) = R_{\frac{\pi}{2}}\vec{x} \text{ in } \mathcal{Z}_{\frac{\pi}{2}}(\vec{x}) = Z_{\frac{\pi}{2}}\vec{x}\,?$$

  $\star$ (c) Kaj predstavljata linearni preslikavi $\mathcal{R}_\varphi, \mathcal{Z}_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, podani z

$$\mathcal{R}_\varphi(\vec{x}) = R_\varphi\vec{x} \text{ in } \mathcal{Z}_\varphi(\vec{x}) = Z_\varphi\vec{x}\,?$$

$\lightning$ (2) Zapišite primer matrike, ki ima paroma ortogonalne stolpce, vendar ni ortogonalna matrika.
$\lightning$ (3) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.
  (a) Če je P matrika, katere stolpci so paroma ortogonalni, velja $P^{-1} = P^T$.
  (b) Če je neničelni vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ pravokotna projekcija vektorja $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ na vektorski podprostor $U \subset \mathbb{R}^n$, potem sta vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ pravokotna.
  (c) Če so stolpci matrike $U \in \mathbb{R}^{n\times r}$ normirani vektorji in tvorijo ortogonalno množico, potem je UU^T pravokotna projekcija vektorja $\vec{x}$ na $C(U)$.
  (d) Če je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, kjer $m > n$, potem linearni sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ nima rešitev.
  (e) Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ranga n in $m \geq n$, potem je najboljša rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ po metodi najmanjših kvadratov enaka $\vec{x} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$.
$\lightning$ (4) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, 6. poglavje.

(Naloge, označene s $\lightning$ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Naloga, označena s $\star$, dopolnjuje obravnavano snov in širi vaše znanje.)