Linearna algebra **12. teden**

Lastne vrednosti in lastni vektorji matrik, 1. del

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Preden začnete oglede predavanj, rešite naslednjo nalogo
  - ϟ Naloga 1: Definirajmo štiri linearne preslikave $\varphi, \zeta, \eta, \vartheta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:
    - (a) φ je projekcija na x-os.
    - (b) ζ je zrcaljenje čez premico $y = x$.
    - (c) η je rotacija okoli koordinatnega izhodišča.
    - (d) Matrika preslikave ϑ v standardni bazi $\mathbb{R}^2$ je enaka $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

    Za vsako od preslikav $\varphi, \zeta, \eta, \vartheta$ ugotovite, ali obstaja kakšen neničeln vektor, ki se slika v svoj večkratnik. Poiščite tudi ustrezne večkratnike. (Če ne gre, poglejte namig[1].)
  - Če ste našli takšne vektorje linearnih preslikav $\varphi, \zeta, \vartheta$, ki se slikajo v svoj večkratnik, ste pravkar našli *lastne vektorje* linearnih preslikav. Pripadajoče večkratnike pa imenujemo *lastne vrednosti* preslikav. O takšnih vektorjih in takšnih večkratnikih bo tekla beseda danes.
- Uvod, video.
- Definicije novih pojmov:
  - *Lastne vrednosti* in *lastni vektorji*, video.
  - ϟ Naloga 2: Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor. Pokažite, da je vektor $\vec{a}$ lastni vektor $n \times n$ matrike $A = \vec{a}\vec{a}^T$.
  - Primer: Naj bo

    $$Z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

    (Pripadajoča linearna preslikava $\mathcal{Z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki je podana s predpisom $\mathcal{Z}(\vec{x}) = Z\vec{x}$ je natanko preslikava zrcaljenja čez ravnino $x = 0$.) Ali lahko uganete lastne vektorje in lastne vrednosti matrike Z? (Če ne gre, si oglejte rešitev.)
  - *Lastni podprostor*, video.
  - Lastni podprostor matrike A pri lastni vrednosti 0 je enak ničelnemu prostoru matrike A, video.

[1] V enem od primerov takšen vektor v $\mathbb{R}^2$ ne obstaja, saj se noben vektor ne slika v svoj večkratnik. V ostalih treh primerih lahko najdete po dva linearno neodvisna vektorja, ki se slikata v svoj večkratnik. Večkratniki, ki pripadajo vektorjem, so (ne nujno v pravem vrstnem redu) v enem od primerov 0,1, drugem 1, -1, tretjem 2,3. Bo šlo sedaj?

- Računanje lastnih vrednosti:
  - Kako poračunamo lastne vektorje pri znani lastni vrednosti, video?
  - Kako poračunamo lastne vrednosti? Definicija *karakterističnega polinoma*. video.
  - Primer: Za matriko
    $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$
    poiščite njene lastne vrednosti in lastne vektorje. Recept je sledeči:
    (1) Najprej izračunajte karakteristični polinom matrike A.
    (2) Nato izračunajte lastne vrednosti matrike A kot ničle karakterističnega polinoma.
    (3) Za vsako od lastnih vrednosti določite njen lastni podprostor. Baza vsakega lastnega podprostora vam bo dala lastne vektorje, ki pripadajo tej lastni vrednosti.

    (Ko boste rešili, si oglejte še mojo rešitev. Pri tem morajo biti vaše lastne vrednosti enake mojim. Vendar pa lahko seveda najdete druge lastne vektorje v izračunanih lastnih podprostorih.)
  - Povzetek, video.
- Lastnosti:
  - Lastni vektorji pri različnih lastnih vrednostih so linearno neodvisni, video.
    - ϟ Naloga 3: Za 4×4 matriko A naj velja $\operatorname{rank}(A - 5I) = 2$, $\operatorname{rank}(A - 4I) = \operatorname{rank}(A - 3I) = 3$ ter $\operatorname{rank}(A - 2I) = \operatorname{rank}(A - I) = 4$. Določite njen karakteristični polinom.
  - Lastne vrednosti trikotnih matrik ležijo na njeni diagonali, video.
  - Lastne vrednosti matrike in njene transponiranke so enake, video.
  - Produkt vseh lastnih vrednosti matrike je enak njeni determinanti, video.
    - ϟ Naloga 4: Naj ima 4×4 matrika A dvojno lastno vrednost 2, enojno lastno vrednost 1 ter determinanto enako 12. Določite njen karakteristični polinom.
  - Vsota vseh lastnih vrednosti matrike je enaka njeni sledi. Primer računanja lastnih vrednosti 2×2 matrike, video.
  - Lastne vrednosti potenc in inverzov matrik, video.
    - ϟ Naloga 5: Naj bo A matrika velikosti 3×3, ki ima pri lastni vrednosti 1 lastni vektor $\vec{x} = [1,\ 2,\ 3]^T$ in pri lastni vrednosti -1 lastni vektor $\vec{y} = [3,\ 2,\ 1]^T$. Izračunajte $A^{2019}(\vec{x} + \vec{y})$.
- Oglejte si še video 3Blue1Brown, Eigenvectors and eigenvalues, Essence of linear algebra, chapter 14.
- Zapiski predavanj, 11. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

ϟ (1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelka 6.1 in 6.2.
ϟ (2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 6.1.

- ϟ (3) Gilbert Strang, Lecture 21: Eigenvalues and eigenvectors.
- ⋆ (4) (Za zahtevnejše bralce) Tomaž Košir: Linearna algebra, Lastne vrednosti in lastni vektorji, študijsko gradivo, 2007.
- ⋆ (5) Preberite si kaj več o uporabi lastnih vrednosti in lastnih vektorjev:
  - (a) Metoda glavnih smeri (PCA)
  - (b) Lastni vektorji spletnih iskalnikov
  - (c) Pixarjeve lastne vrednosti in vektorji

3. Ali razumem snov?

- ϟ (1) Matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 - x^2$. Izračunajte $\operatorname{rank}(A+I)$.
- ϟ (2) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ simetrična matrika z enojnima lastnima vrednostima -1 in 1, njen rang pa je enak $\operatorname{rank}(A) = 3$. Izračunajte njeno determinanto $\det(A)$.
- ϟ (3) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ matrika z lastnimi vrednostmi -1, 1, $\frac{1}{2}$, 2 in 3, za matriko $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ pa velja $\det(B) = 2$. Izračunajte determinanto $\det(AB^T)$.
- ϟ (4) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika, za katero velja $A^2 = A$. Pokažite, da je vsak vektor $\vec{y} = A\vec{x} \in C(A)$ lastni vektor matrike A. Določite tudi pripadajočo lastno vrednost.
- ϟ (5) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika, za katero velja $A^2 = A$. Pokažite, da je za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor $\vec{x} - A\vec{x}$ lastni vektor matrike A. Določite tudi pripadajočo lastno vrednost.
- ϟ (6) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.
  - (a) Če je 0 lastna vrednost matrike A, potem je A obrnljiva.
  - (b) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Če ima linearni sistem enačb $Ax = 0$ netrivialno rešitev, potem je 0 lastna vrednost matrike A.
  - (c) Če ima matrika A lastno vrednost λ, potem ima matrika $A + \alpha I$ lastno vrednost $\lambda + \alpha$.
- ϟ (7) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 86(a), 88 (a)-(b), 93.

(Naloge, označene s ϟ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Članki, označeni s ⋆, pa dopolnjujejo obravnavano snov in širijo vaše znanje.)