Linearna algebra	**Teden 12**
Lastne vrednosti in lastni vektorji matrik, 2. del	
	Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- Lastne vrednosti matrike se ne ohranjajo z Gaussovo eliminacijo,video.
- *Podobnost matrik.*
  - Definicija. Matriki A in B sta *podobni*, če velja $A = PBP^{-1}$ za neko obrnljivo matriko P, video.
  - ↯ Naloga 1: Pokažite, da če je matrika A podobna matriki B, potem je matrika A^3 podobna matriki B^3.
  - Podobni matriki imata enak karakteristični polinom, video.
  - Obrat ne velja: obstajajo matrike z enakim karakterističnim polinomom, ki pa niso podobne, video.
  - Če sta si matriki A in B podobni, potem
    - imata enake lastne vrednosti,
    - $\det(A) = \det(B)$,
    - $\mathrm{sled}(A) = \mathrm{sled}(B)$ in
    - $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.
    - video.
- *Diagonalizacija matrik*.
  - Definicija. Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *diagonalizabilna*, če je podobna kakšni diagonalni matriki. T.j., če obstajata takšna diagonalna matrika $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in takšna obrnljiva matrika $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da velja $A = PDP^{-1}$, video.
  - Primer nediagonalizabilne matrike, video
  - Če je matrika A diagonalizabilna in $A = PDP^{-1}$, potem so
    - diagonalni elementi matrike D natanko lastne vrednosti matrike A,
    - stolpci matrike P natanko lastni vektorji matrike A (zapisani v pripadajočem vrstnem redu lastnih vrednosti v matriki D).
    - video.
  - Matriko A je mogoče diagonalizirati natanko tedaj, ko lahko najdemo bazo prostora $\mathbb{R}^n$, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A. (Torej natanko tedaj, ko je večkratnost vsake lastne vrednosti λ kot ničle karakterističnega polinoma matrike A enaka dimenziji pripadajočega lastnega podprostora $\dim N(A - \lambda I)$.) video.
  - ↯ Naloga 2: Naj bo matrika A diagonalizabilna. Pokažite, da je rang matrike A enak številu njenih neničelnih lastnih vrednosti.
  - Še en primer nediagonalizabilne matrike, video.
  - Ali je matrika $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ diagonalizabilna? (Rešitev.)

- Računanje potenc diagonalizabilnih matrik, video.

- *Lastne vrednosti in lastni vektorji simetričnih matrik*
  - Lastne vrednosti simetričnih matrik so realne, video.
  - Lastni vektorji simetričnih matrik tvorijo ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^n$, video.
  - ϟ Naloga 3: Simetrična matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 - x^3$.
    (A) Določite vse lastne vrednosti matrike A.
    (B) Izračunajte $\dim N(A)$.
    (C) Naj bo $\vec{v} = [1, 0, 0, 1]^\mathsf{T}$ lastni vektor matrike A pri lastni vrednosti 1. Zapišite vsaj en lastni vektor $\vec{w}$ pri lastni vrednosti 0.
  - Spektralni razcep simetričnih matrik, video.
- Zapiski predavanj, 12. teden.

2. Kje si lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelka 6.3 (brez 6.3.2) in 6.4 (brez 6.4.2).
(2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Sections 6.2, 6.4 in 6.6.
(3) Gilbert Strang, Video Lectures:
- Lecture 22: Diagonalization and powers of A,
- Lecture 25: Symmetric matrices and positive definiteness (prvih 29 minut),
- Lecture 28: Similar matrices and jordan form (prvih 31 minut).

3. Ali razumem snov?

ϟ (1) Denimo, da sta si matriki $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ podobni. Pokažite, da sta si tedaj tudi $A + I_n$ in $B + I_n$ podobni.

ϟ (2) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pokažite, da so vse lastne vrednosti matrike $AA^\top$ realne in nenegativne. (Namig: Če je $AA^\top\vec{x} = \lambda\vec{x}$, potem enakost z leve pomnožite z vrstico $\vec{x}^T$. Poglejte, kako lahko s pomočjo dolžin zapišete levo in kako desno stran.)

ϟ (3) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simetrična matrika z lastnimi vrednostmi 1, 2 in 3. Lastni vektor pri lastni vrednosti 1 je enak $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, lastni vektor pri lastni vrednosti 2 pa $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Zapišite lastni vektor pri lastni vrednosti 3.

ϟ (4) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simetrična matrika z dvojno lastno vrednostjo -1 in njej pripadajočima lastnima vektorjema $\vec{v} = \begin{bmatrix}0, & 1, & 1\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ ter $\vec{u} = \begin{bmatrix}1, & 1, & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

(a) (5 točk) Izračunajte $A^{2021}\,\vec{v}$.

(b) (5 točk) Ali lahko kaj poveste o lastni vrednosti $\lambda_3 \neq -1$ matrike A? Ali lahko kaj poveste o lastnem vektorju, ki pripada λ_3?

ϟ (5) Simetrična matrika A naj ima karakteristični polinom enak $\Delta_A(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Izračunajte $\operatorname{rank}(A+I)$.

ϟ (6) Denimo, da je matrika $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična ter $A = B^2$. Pokažite, da so vse lastne vrednosti matrike A nenegativne.

ϟ (7) Drži ali ne drži? Utemeljite ali poiščite protipromer.

(a) Če je matrika A diagonalizabilna, potem je tudi obrnljiva.
(b) Vsaka simetrična $n \times n$ matrika ima n različnih lastnih vrednosti.
(c) Vsaka simetrična $n \times n$ matrika ima n realnih lastnih vrednosti.
(d) Vsaka simetrična matrika je diagonalizabilna.
(e) Vsaka simetrična matrika je obrnljiva.
(f) Lastni vektorji $n \times n$ simetrične matrike z večkratnimi lastnimi vrednostmi ne tvorijo baze $\mathbb{R}^n$.
(g) Če je matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizabilna, potem je vsak vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ lastni vektor matrike A.
(h) Matrika $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ima edini lastni vrednosti enaki 1 in -1. Če je $\operatorname{rank}(A+I) = 1$, potem je A diagonalizabilna.
(i) Matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ je diagonalizabilna.

ϟ (8) Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ poljuben neničeln vektor.

(a) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^T$ simetrična matrika.
(b) Pokažite, da je matrika $\vec{a}\vec{a}^T$ matrika ranga 1.
(c) Pokažite, da je vektor $\vec{a}$ lastni vektor matrike $\vec{a}\vec{a}^T$. Določite pripadajočo lastno vrednost.
(d) Zapišite vse lastne vrednosti matrike $\vec{a}\vec{a}^T$.
(e) Naj bo $\vec{a}$ lastni vektor simetrične matrike A. Pokažite, da matriki A in $\vec{a}\vec{a}^T$ komutirata.

⋆ (9) S pomočjo matematične indukcije na velikost matrike n pokažite, da velja naslednji izrek: Naj bo A poljubna $n \times n$ realna matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Potem obstaja takšna ortogonalna matrika $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da je

$$Q^T A Q = T,$$

kjer je T zgornje trikotna matrika z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

(a) Najprej pokažite, da trditev velja za $n = 1$ ☺.
(b) Predpostavite, da trditev velja za nek n. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$. Izberite lastno vrednost λ_1 in pripadajoči lastni vektor v dolžine 1. Naj bo U poljubna ortogonalna matrika, ki ima prvi stolpec enak v.

(i) Pokažite, da je $v^T A v = \lambda_1$.
(ii) Pokažite, da je $U^{-1} A U = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & u^T \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$.

(iii) Uporabite indukcijsko predpostavko na $n \times n$ matriki B: $R^T BR = T_n$.

(iv) Definirajte $S = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & R \end{array}\right]$ ter $Q = US$ in pokažite, da je Q ortogonalna matrika, za katero je $Q^T AQ = T$, kjer je T zgornje trikotna matrika z diagonalnimi elementi enakimi lastnim vrednostim matrike A.

$\lightning$(10) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Naloge 85-86, 88-89,92-95, 97, 99, 101.

(Naloge, označene s $\lightning$ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Naloga, označena s $\star$, pa dopolnjuje obravnavano snov in širi vaše znanje.)