

1. Poišči splošne rešitve spodnjih linearnih diferencialnih enačb in pripadajočih začetnih problemov.

(a) $xy' + y = 3x^2 - 2x + 1, y(1) = 1,$

(d) $y' + y/x = \cos(x), y(\pi) = 0,$

(b) $y' + y = x + 1, y(0) = 2,$

(e) $xy' + y = -\sin(x), y(\pi) = 0,$

(c) $\sin(x)y' + y = 1, y(\pi/2) = 2,$

(f) $y' - 2xy = 2x, y(1) = 0.$

2. **Ortogonalne trajektorije.** Naj bo $f(x, y, c)$ funkcija treh spremenljivk. Spremenljivki x in y gledamo kot običajni kartezični koordinati točke v ravnini, spremenljivko c pa kot parameter. Enačba $f(x, y, c) = 0$ podaja družino krivulj v ravnini. (Pri vsakem parametru c dobimo po eno nivojnico funkcije dveh spremenljivk.) Pri dani družini krivulj bomo poiskali družino *ortogonalnih trajektorij* na te krivulje – novo družino krivulj, v kateri vsaka krivulja seka krivulje iz prve družine pod pravim kotom. Kako? Poiščemo diferencialno enačbo prvega reda, katere splošna rešitev se izrazi z enačbo $f(x, y, c) = 0$, nato pa v tej diferencialni enačbi y' zamenjamo z $-1/y'$.

Poišči ortogonalne družine krivulj k spodnjim družinam. (Rezultat lahko pušči v implicitni obliki.)

(a) $y = \frac{a}{x}$ za $a \in \mathbb{R}$,

(b) $x^2 + y^2 = r^2$ za $r \in \mathbb{R}$,

(c) $(x - r)^2 + y^2 = r^2$ za $r \in \mathbb{R}$.

3. Dana je diferencialna enačba

$$2xy - 9x^2 + (2y + x^2 + 1)y' = 0$$

z začetnim pogojem $y(0) = -3$.

- (a) Zapiši funkciji $P(x, y)$ in $Q(x, y)$, da bo $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ ravno zgornja diferencialna enačba.
- (b) Preveri, da velja $P_y = Q_x$.
- (c) Poišči funkcijo $f(x, y)$, da bo veljalo $P = f_x$ in $Q = f_y$.
- (d) Reši zgornjo diferencialno enačbo.
4. Za $\mathbf{x} = [x, y]^T$ poišči splošne rešitve sistemov diferencialnih enačb $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ za naslednje matrike:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

S pomočjo Octave-a nariši fazne slike (tire rešitev za več različnih začetnih pogojev) za vsakega od zgornjih sistemov. Kako lastne vrednosti matrike A vplivajo na obnašanje rešitev?