

Lastne vrednosti in lastni vektorji matrik, 3. del

Polona Oblak

1. NOVO DEFINIRANI POJMI

- *Razcep singularnih vrednosti (SVD)*
 - Uvod, video.
 - Kaj sploh je razcep singularnih vrednosti in kako ga uporabiti, video.
 - Primer računanja približkov matrik s pomočjo SVD, video.
 - Motivacija: pogledajte si, kako in zakaj boste kdaj v prihodnosti želeli zmanjšati velikost (dimenzije) podatkov, predavanje Jure Leskovec: Lecture 46 - Dimensionality Reduction - Introduction.
 - Tehnična izvedba:
 - * $A^T A$ je simetrična matrika z nenegativnimi lastnimi vrednostmi, video.
 - * Diagonalni elementi diagonalne matrike Σ so koreni lastnih vrednosti matrike $A^T A$, video.
 - * Stolpci matrik U in V so lastni vektorji matrik AA^T in $A^T A$, video.
 - Matriki AB in BA se ujemata v neničelnih lastnih vrednostih, video.
 - * Singularne vrednosti, video.
 - Tri oblike razcepa singularnih vrednosti (SVD), video.
 - Primer razcepa simetrične matrike, video.
 - Geometrija SVD in PCA, video.
 - Igrajte se sami z demonstracijo SVD, Mathematica Demonstration.
 - Jure Leskovec: Lecture 47 - Singular Value Decomposition.
 - Jure Leskovec: Lecture 48 - Dimensionality Reduction with SVD.
- *Markovske verige*
 - Uvod, video.
 - Matrika prehodnih stanj, video.
 - Potence matrike prehodnih stanj, video.
 - Primer v Mathematici, video.
 - Zaključek, video.
- Zapiski predavanj, 14. teden.

2. KJE SI LAHKO PREBEREM/OGLEDAM SNOV?

- (1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Razdelek 6.5.
- (2) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Section 6.7.
- (3) Gilbert Strang, Lecture 29: Singular value decomposition,

(4) Gilbert Strang: Singular Value Decomposition (the SVD),

3. ALI RAZUMEM SNOV?

- ⚡ (1) Izračunajte singularne vrednosti matrike $A = [A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, katere stolpci $A^{(i)}$ so paroma pravokotni z dolžinami $\|A^{(i)}\| = \alpha_i$.
- ⚡ (2) Naj bo $A = U\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obrnljiva matrika.
- Pokažite, da so vse singularne vrednosti matrike A neničelne.
 - Pokažite, da je Σ obrnljiva matrika.
 - Zapišite razcep singularnih vrednosti matrike A^{-1} .
- ⚡ (3) Drži ali ne drži?
- Če je $A = U\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, kjer $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ter $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalni matriki, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pa pravokotna diagonalna matrika z diagonalnimi elementi $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, potem so $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ lastne vrednosti matrike AA^T .
 - Če je A simetrična matrika s samimi pozitivnimi lastnimi vrednostmi, potem so singularne vrednosti matrike A enake lastnim vrednostim matrike A .
 - Če je $A = QR \in \mathbb{R}^{n \times n}$ QR razcep matrike A , potem se singularne vrednosti matrik A in R ujemata.
- (4) Naj bo A matrika z nenegativnimi elementi, ki ima vsoto elementov v vsakem stolpcu enako 1.
- ⚡ (a) Pokažite, da ima matrika A^T lastno vrednost 1.
 - ⚡ (b) Pokažite, da ima matrika A lastno vrednost 1.
 - ★ (c) Pokažite, da za vsako lastno vrednost λ matrike A^T velja $|\lambda| \leq 1$.
 - ★ (d) Pokažite, da za vsako lastno vrednost λ matrike A velja $|\lambda| \leq 1$.

(Naloge, označene s ⚡ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov. Nalogi, označeni s ★, pa dopolnjuje obravnavano snov in širi vaše znanje.)