

1. Za $\mathbf{x} = [x, y]^T$ poišči splošne rešitve sistemov diferencialnih enačb $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ za naslednje matrike:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (c) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

S pomočjo octave-a nariši fazne slike (tire rešitev za več različnih začetnih pogojev) za vsakega od zgornjih sistemov. Kako lastne vrednosti matrike A vplivajo na obnašanje rešitev?

2. Osnovni SIR epidemološki model populacijo velikosti N razdeli na 3 dele: dovzetne S (*susceptible*), kužne I (*infectious*) in okrevane R (*recovered*). Dinamiko tega modela predstavimo s sistemom diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\frac{\beta IS}{N}, \\ \dot{I} &= \frac{\beta IS}{N} - \gamma I, \\ \dot{R} &= \gamma I, \end{aligned}$$

kjer so $S(t)$, $I(t)$ in $R(t)$ funkcije časa, $\dot{S} = \frac{dS}{dt}$, $\dot{I} = \frac{dI}{dt}$ in $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$ pa njihovi odvodi. (Kvocienent $\frac{\beta}{\gamma}$ pogosto označimo z R_0 .)

- (a) Preveri, da velja $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$ in zato $S(t) + I(t) + R(t) = N$ (konstanta – velikost populacije N).

V nadaljevanju privzamemo $N = 1$, funkcije S , I in R tako predstavljajo ustrezne deleže populacije.

- (b) Utemelji, da je $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$, torej sta s stališča reševanja pomembni le prvi dve enačbi zgornjega sistema.
- (c) Uporabi rk4 in poišči rešitve zgornjega sistema za nekaj izbranih začetnih pogojev in nekaj izbranih vrednosti parametrov β in γ .

3. *Matematično nihalo* je nihalo, pri katerem točkasta masa m visi na lahki, ravni (in neupogljivi) palici dolžine ℓ , ki se lahko prosto vrti okrog vpenjališča. Na maso m deluje gravitacijska sila mg , kot odmika od ravnovesne lege ob času t pa označimo s $\phi(t)$.

- (a) Prepričaj se, da funkcija ϕ reši diferencialno enačbo

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell} \sin(\phi) = 0.$$

- (b) Z uvedbo $\omega = \dot{\phi}$ prevedi zgornjo diferencialno enačbo 2. reda v sistem dveh diferencialnih enačb 1. reda.
- (c) Nariši fazno sliko $(\phi, \dot{\phi}) = (\phi, \omega)$ zgornje diferencialne enačbe. Pomagaj si z rk4.