1. Poišči (ekonomični) singularni razcep matrike
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$
tj. poišči ortogonalni matriki U in V ter (kvadratno) diagonalno matriko S, da bo $A = USV^\mathsf{T}$. Lahko slediš tem korakom:

   (a) Diagonaliziraj AA^T v ortonormirani bazi $\mathbb{R}^2$. Prepričaj se, da je prehodna matrika ravno U, diagonalna matrika pa točno S^2.

   (b) S pomočjo S in U iz prejšnje točke ter zapisa $A = USV^\mathsf{T}$ določi še V.

   Rešitev: (a) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $AA^\mathsf{T} = UDU^\mathsf{T}$.

   (b) U kot prej, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $V = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Naj bo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ predoločen sistem linearnih enačb, tj. matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je pokončna; $m \geq n$. Denimo, da poznamo singularni razcep A; $A = USV^\mathsf{T}$. Naj bo S^+ matrika, ki jo dobimo iz S, tako da vse neničelne singularne vrednosti $\sigma_i > 0$ zamenjamo z $\frac{1}{\sigma_i}$ in transponiramo. Označimo $A^+ = VS^+U^\mathsf{T}$. Preveri naslednje:

   (a) Če je A kvadratna in polnega ranga, potem je $A^+ = A^{-1}$.

   (b) Vektor $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ je rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ v smislu linearne metode najmanjših kvadratov (tj. $A^+\mathbf{b}$ je ena od rešitev sistema $A^\mathsf{T}A\mathbf{x} = A^\mathsf{T}\mathbf{b}$).

3. Na nanospletu so štiri (!) spletne strani. (Stolpčno–stohastična) matrika
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$
podaja prehodne verjetnosti: Na mestu (i, j) v matriki P je verjetnost p_{ij}, da uporabnik, ki se trenutno nahaja na strani z indeksom j klikne na povezavo na stran z indeksom i.
Pokaži, da ima matrika P^T (in zato tudi matrika P) vsaj eno lastno vrednost, ki je enaka 1. Nato poišči tisti lastni vektor $\mathbf{v}$ matrike P za lastno vrednost 1, ki ima vsoto komponent enako 1. (Temu lastnemu vektorju pravimo *invariantna porazdelitev* pripadajoče markovske verige.)
Rešitev: $\mathbf{v} = \frac{1}{9}[3, 2, 1, 3]^\mathsf{T}$.