Za podmnožico $M \subseteq \mathbb{R}^n$ definiramo

$$M^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ za vsak } \mathbf{y} \in M\}.$$

Podmnožica $M^\perp$ je vedno vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$ (Zakaj?), ki ga imenujemo *ortogonalni komplement* podmnožice M. Z besedami: $M^\perp$ je vektorski podprostor vseh vektorjev $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki so pravokotni na vse vektorje $\mathbf{y} \in M$.

1. (a) Poišči bazi za $\{[1,1,1]^\mathsf{T}\}^\perp$ ter $\left(\mathcal{L}(\{[1,1,0]^\mathsf{T},[0,1,1]^\mathsf{T}\})\right)^\perp$.

   (b) Utemelji, da velja $M^\perp = (\mathcal{L}(M))^\perp$ ter $M^{\perp\perp} = \mathcal{L}(M)$.

2. Naj bo V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$ razpet na vektorje

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{z} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči bazi za podprostora V in $V^\perp$.

   (b) Poišči ortonormirani bazi za podprostora V in $V^\perp$.

   (c) Poišči pravokotni projekciji vektorja $[1,2,3,4]^\mathsf{T}$ na V in $V^\perp$.

   Rešitev: (a) $B_V = \{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$, $B_{V^\perp} = \{[1,0,0,-1]^\mathsf{T},[0,1,-1,0]^\mathsf{T}\}$.
   (b) $B'_V = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{x}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{y}\right\}$, $B'_{V^\perp} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,0,-1]^\mathsf{T}, \frac{1}{\sqrt{2}}[0,1,-1,0]^\mathsf{T}\right\}$.
   (c) Pravokotna projekcija na V je $\frac{5}{2}[1,1,1,1]^\mathsf{T}$, pravokotna projekcija na $V^\perp$ je $\frac{1}{2}[-3,-1,1,3]^\mathsf{T}$.

3. Vektorski podprostor $U \leq \mathbb{R}^4$ razpenjajo vektorji

$$\mathbf{a}_1 = [1,1,1,1]^\mathsf{T}, \quad \mathbf{a}_2 = [1,0,2,1]^\mathsf{T} \quad \text{in} \quad \mathbf{a}_3 = [1,-1,1,1]^\mathsf{T}.$$

   (a) Poišči ortonormirano bazo B_U podprostora U.

   (b) Izrazi vektorje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ in $\mathbf{a}_3$ v tej bazi.

   (c) Poišči QR–razcep matrike $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$.

   (d) Dopolni bazo B_U do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^4$.

   (e) Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{v} = [1,1,1,5]^\mathsf{T}$ na podprostor U.

   Rešitev: (a) $B_U = \{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\} = \left\{\frac{1}{2}[1,1,1,1]^\mathsf{T}, \frac{1}{\sqrt{2}}[0,-1,1,0]^\mathsf{T}, \frac{1}{2}[1,-1,-1,1]^\mathsf{T}\right\}$.
   (b) $\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{q}_1$, $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{q}_1 + \sqrt{2}\mathbf{q}_2$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{q}_1 + \sqrt{2}\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3$.
   (c) $Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & -\sqrt{2} & -1\\1 & \sqrt{2} & -1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ in $R = \begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.
   (d) B_U dodamo $\mathbf{q}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1,0,0,1]^\mathsf{T}$.
   (e) Pravokotna projekcija $\mathbf{v}$ na U je $[3,1,1,3]^\mathsf{T}$.

4. Poišči QR–razcep matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 2/3 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -2/3 & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$.

5. Recimo, da je matrika A ortogonalno podobna diagonalni matriki D. Velja torej $A = PDP^{-1}$, kjer je P ortogonalna matrika. Utemelji, da je tedaj matrika A simetrična, tj. velja $A^{\mathsf{T}} = A$.