1. S topom, ki je postavljen v koordinatno izhodišče $(0,0,0)$, želimo zadeti tarčo, ki leži na xy-ravnini (recimo v točki $T(400\,\mathrm{m}, 300\,\mathrm{m})$). Hitrost krogle v trenutku izstrelitve je $v_0 = 300\,\mathrm{m/s}$, top pa lahko poljubno vrtimo okrog z-osi in spreminjamo naklon cevi. Krogla seveda čuti zračni upor $c = 0.004$ (kvadratni zakon upora), poleg tega pa nam nagaja tudi veter, ki piha s konstantno hitrostjo $\mathbf{w} = [5, -2, 0]^\mathsf{T}\,\mathrm{m/s}$.

   Kam moramo usmeriti top in kako nastaviti naklon, da bomo zadeli tarčo?

   (a) Zapiši vse sile, ki delujejo na izstrelek (kroglo) z maso m, položajem $\mathbf{x}$ in hitrostjo $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$. Nato se z uporabo 2. Newtonovega zakona prepričaj, da je enačba gibanja izstrelka

   $$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{g} + c(\mathbf{w} - \dot{\mathbf{x}})\|\mathbf{w} - \dot{\mathbf{x}}\|.$$

   (b) Prevedi zgornji sistem treh DE 2. reda v sistem šestih DE 1. reda.

   (c) Zapišimo začetno hitrost izstrelka kot

   $$\mathbf{v}_0 = v_0 \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix},$$

   kjer kota ϕ in θ določata začetno smer. Izstrelek zadane xy-ravnino v točki $[x, y, 0]^\mathsf{T}$. Imamo torej funkcijo dveh spremenljivk $\mathbf{F}$, ki smeri določeni s kotoma ϕ in θ priredi točko na ravnini $[x, y]^\mathsf{T} = \mathbf{F}([\phi, \theta]^\mathsf{T})$. Napiši funkcijo `T = izstrelek([phi; theta])` v octave-u, ki vrne mesto zadetka `T = [x; y]` pri začetni smeri določeni s `[phi; theta]`. (Zgornji sistem DE rešujemo numerično z Runge–Kutta metodo, dokler izstrelek ne zadane xy-ravnine.)

   (d) Poišči rešitev $[\phi, \theta]^\mathsf{T}$ enačbe $\mathbf{F}([\phi, \theta]^\mathsf{T}) = \mathbf{r}_T$ s spodaj opisano sekantno (oz. diskretizirano Newtonovo ali Broydenovo) metodo. Napiši octave funkcijo `x = secant([x0, ..., xn], F, tol, maxit)`.

Reševanje sistemov nelinearnih enačb, 2. del
Rešitev sistema $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, kjer je $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zvezno odvedljiva preslikava, že znamo poiskati z Newtonovo metodo. Poleg začetnega približka $\mathbf{x}^{(0)}$ in funkcije $\mathbf{F}$ metoda potrebuje tudi Jacobijevo matriko $J\mathbf{F}$ funkcije $\mathbf{F}$. Kaj narediti, če Jacobijeve matrike *nimamo*? (Recimo, da je Jacobijevo matriko težko izračunati, ali je ne znamo, ali pa je izračun $J\mathbf{F}$ preveč časovno potraten.) Opisali bomo tri možnosti, izvedli pa eno (mogoče dve) od teh možnosti.

- *Diskretizirana Newtonova metoda* parcialne odvode $\partial F_i / \partial x_j$ nadomesti s končnimi diferencami oblike

  $$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \doteq \frac{F_i(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - F_i(\mathbf{x})}{h},$$

  kjer je h primerno (majhno) število (običajno $h \geq \sqrt{\epsilon}$). Iz tega sestavimo približek za Jacobijevo matriko na vsakem koraku iteracije. Preostanek metode se ujema z običajno Newtonovo iteracijo. Slabost: Na vsakem koraku moramo izračunati $n+1$ funkcijskih vrednosti (funkcije $\mathbf{F}$). Prednost: Red konvergence je praktično enak kot pri običajni Newtonovi metodi, tj. 2, in *ni* odvisen od n (dimenzije prostora $\mathbb{R}^n$).

- *Večrazsežna sekantna metoda* je posplošitev sekantne metode za zvezno funkcijo f ene spremenljivke x in enačbo $f(x) = 0$. Pri (enorazsežni) sekanti metodi začnemo z začetnima približkoma $x^{(0)}$ in $x^{(1)}$, poiščemo enačbo premice $y = ax + b$, ki gre skozi točki $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$ in $(x^{(1)}, f(x^{(1)}))$, in rešimo enačbo $ax + b = 0$, dobimo rešitev $x^{(2)}$. Nato zavržemo $x^{(0)}$ in uporabimo $x^{(1)}$ in $x^{(2)}$ za nova približka pri naslednjem koraku iteracije...

  Pri večrazsežni sekantni metodi bomo preslikavo $\mathbf{F}$ aproksimirali z afino preslikavo $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ (to je direktna posplošitev $x \mapsto ax + b$). Za to bomo potrebovali $n+1$ začetnih približkov $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$. Rešitev $\mathbf{x}^{(n+1)}$ enačbe $A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ nato dodamo med približke za rešitev in zavržemo $\mathbf{x}^{(0)}$. Ponavljamo...

  Opišimo natančneje, kako bomo izvedli en korak te itracije. Na prvi pogled se zdi, da bomo morali na vsakem koraku rešiti linearen sistem oblike

  $$\begin{aligned} A\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{b} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}), \\ A\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}), \\ &\vdots \\ A\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{b} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}), \end{aligned}$$

  kjer so neznanke $A = [a_{ij}]$ in $\mathbf{b} = [b_i]^\mathsf{T}$. (To je sistem $n^2 + n$ enačb z $n^2 + n$ neznankami!) Ko dobimo A in $\mathbf{b}$, rešimo še $A\mathbf{x} = -\mathbf{b}$ in dobimo $\mathbf{x}^{(n+1)}$. (Ta sistem je precej manjši; ima n enačb in n neznank.) Izkaže se, da lahko do $\mathbf{x}^{(n+1)}$ pridemo skoraj direktno, če rešimo ustrezen sistem $n+1$ enačb. Tako: Naj bo $X = [\mathbf{x}^{(0)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ matrika začetnih približkov (to je $n \times (n+1)$ matrika). Nov približek $\mathbf{x}^{(n+1)}$ dobimo tako, da najprej rešimo sistem $Z\mathbf{z} = \mathbf{e}_1$, kjer je

  $$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) & \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) & \cdots & \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = [1, 0, \ldots, 0]^\mathsf{T},$$

  in postavimo $\mathbf{x}^{(n+1)} = X\mathbf{z}$.

  Prednost sekantne metode: Na vsakem koraku (razen pri prvem) moramo izračunati le eno funkcijsko vrednost. Slabost: Red konvergence je odvisen od n, enak je pozitivni rešitvi enačbe $t^{n+1} - t^n - 1 = 0$. (Za $n = 1$ je $t \doteq 1.618$, za $n = 2$ je $t \doteq 1.466$, pri $n = 3$ je $t \doteq 1.380$, ...)

- *Broydenova metoda* je podobna (diskretizirani) Newtonovi metodi. Namesto izračuna (približka) Jacobijeve matrike na vsakem koraku le malo popravimo (približek) Jacobijeve matrike funkcije $\mathbf{F}$. Naj bo $J_0 = J\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$ (približek) za Jacobijevo matriko $\mathbf{F}$ v $\mathbf{x}^{(0)}$. Naj bo J_k približek za Jacobijevo matriko $\mathbf{F}$ na k-tem koraku, $\mathbf{x}^{(k)}$ pa približek iteracije na k-tem koraku. Nov približek iteracije je potem

  $$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J_k^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Zahtevamo, da nov približek Jacobijeve matrike, J_{k+1}, zadošča *sekantni enačbi*

$$J_{k+1}(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Matrik J_{k+1}, ki zadoščajo zgornji enačbi, je precej. Pri Broydenovi metodi za J_{k+1} vzamemo

$$J_{k+1} = J_k + \frac{1}{\|\mathbf{d}_k\|^2}\left(\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) - J_k\mathbf{d}_k\right)\mathbf{d}_k^\top,$$

kjer je $\mathbf{d}_k = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$. (Prepričaj se, da ta J_{k+1} res zadošča sekantni enačbi!) Velika prednost Broydenove metode v primerjavi z diskretizirano Newtonovo je ta, da potrebuje le en izračun funkcijske vrednosti na vsakem koraku. Slabost: Za konvergenco potrebujemo več korakov, saj na vsakem koraku le približno popravimo Jacobijevo matriko (oz. približek le-te). To niti ni huda slabost; koraki Broydenove metode se običajno precej hitreje izvedejo, saj nam ni treba izračunati $n+1$ funkcijskih vrednosti na vsakem koraku. To pa seveda pomeni, da do rešitve pridemo hitreje.