Poglavje 5

Numerična integracija

5.1 Uvod

Pojma odvoda in določenega integrala smo že srečali pri matematiki. Vemo, da je odvajanje razmeroma enostavna operacija in da lahko vsaki funkciji, ki jo lahko zapišemo kot kombinacijo elementarnih funkcij, poiščemo odvod. Povsem drugače je z integralom. Določeni integral izračunamo analitično s pomočjo nedoločenega integrala po formuli

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{5.1}$$

kjer je $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Nedoločenega integrala velikokrat ne moremo zapisati kot kombinacijo elementarnih funkcij, kot na primer integrale

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{in} \quad \int x \operatorname{tg} x\,dx.$$

Pri nekaterih določenih integralih, ki v uporabi zelo pogosto nastopajo, ta problem nekako 'pometemo pod preprogo' tako, da ga proglasimo za novo 'elementarno funkcijo' (to so tako imenovane *specialne funkcije*). Tako naredimo npr. s *funkcijo napake*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

ki je pomembna pri verjetnostnem računu in statistiki in katere vrednosti so tabelirane. Pri večini določenih integralov pa moramo ravnati drugače. Integral navadno nadomestimo s primerno končno integralsko vsoto in izkaže se, da je napaka, ki jo pri tem zagrešimo, običajno omejena in dovolj majhna.

Prav obratna situacija pa je pri računanju odvodov dane funkcije. Kadar je funkcija podana s formulo, jo je navadno lahko odvajati analitično. Teže pa je z numerično metodo natančno izračunati vrednost odvoda.

V tem poglavju bomo najprej spoznali nekaj osnovnih integracijskih formul in splošen postopek za njihovo konstrukcijo. Videli bomo, kako lahko izračunamo tudi integral singularne funkcije. Naučili se bomo sproti prilagajati dolžino koraka integracije tako, da bomo integral izračunali z vnaprej predpisano natančnostjo in kako lahko s primerno kombinacijo enostavnih integracijskih formul dosežemo večjo natančnost (Rombergova metoda). Na koncu si bomo ogledali še nekaj metod za numerično računanje odvodov funkcije.

5.2 Trapezna formula

Da bi lahko izračunali približno vrednost določenega integrala

$$I = \int_a^{a+h} f(x)\,dx, \tag{5.2}$$

bomo funkcijo f nadomestili z linearnim interpolacijskim polinomom skozi točki a in $a+h$, torej

$$I \approx \int_a^{a+h} p(x)\,dx,$$

kjer je interpolacijski polinom p enak

$$p(x) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x-a) + f(a).$$

Če je funkcija f vsaj dvakrat odvedljiva na integracijskem intervalu $[a, a+h]$, je

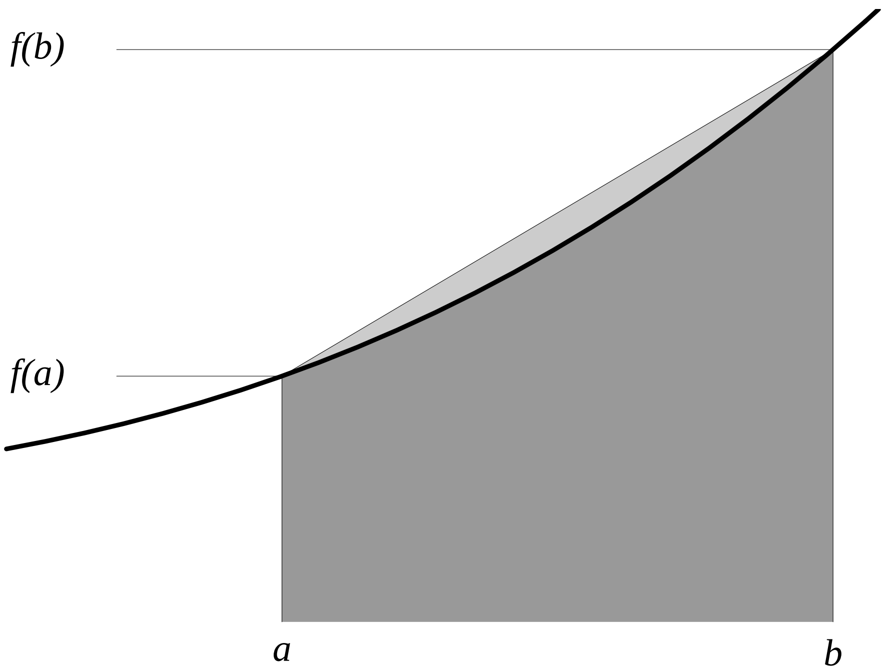
$$f(x) = p(x) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-a-h), \tag{5.3}$$

kjer je točka ξ med a in $a+h$. Če to vstavimo v integral (5.2) in integriramo, dobimo *trapezno formulo* za izračun vrednosti določenega integrala

(problem 1)

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(a+h)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi_1), \tag{5.4}$$

kjer je ξ_1 zopet neka točka med a in $a+h$, navadno različna od ξ. Geometrijsko si trapezno formulo predstavljamo tako, da krivočrtni trapez med grafom funkcije f in abscisno osjo v mejah od a do $a+h$ nadomestimo s pravim trapezom (slika 5.1).



Slika 5.1: Trapezna formula

Napaka trapezne formule (5.4) je majhna, če je $f''(x)$ majhen na $[a, a+h]$ in če je dolžina integracijskega intervala h majhna. Tako je npr. za $|f''(x)| \leq 1$ in $h = 1/10$ napaka trapezne formule manjša od 10^{-4}. Seveda pa pri daljših intervalih od trapezne formule (5.4) ne moremo pričakovati majhne napake. V tem primeru si pomagamo tako, da celoten integracijski interval razdelimo na dovolj majhne podintervale in uporabimo trapezno formulo na vsakem od podintervalov, potem pa dobljene delne integrale seštejemo. Celoten interval $[a, b]$ razdelimo na n (zaradi enostavnosti enakih) podintervalov dolžine $h =$

$(b-a)/n$ in označimo delilne točke podintervalov z

$$x_i = a + ih; \quad i = 0, \ldots, n,$$

tako da imamo

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Na vsakem od podintervalov uporabimo trapezno formulo

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_{i-1} + h)),$$

in delne rezultate seštejemo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Dobljeni formuli

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)], \tag{5.5}$$

pravimo *trapezno pravilo.*

Oglejmo si še napako trapeznega pravila. Privzemimo, da je integracijska funkcija f dvakrat zvezno odvedljiva na intervalu $[a,b]$. Če s $T(h)$ označimo približek k vrednosti integrala (5.1), izračunan s trapeznim pravilom (5.5), iz (5.4) dobimo

$$\int_a^b f(x)\,dx - T(h) = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = -\frac{h^2}{12}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i),$$

kjer je $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Ker je faktor $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$ ravno povprečna vrednost števil $f''(\xi_i)$, leži med najmanjšim in največjim od teh števil. Iz izreka o povprečni vrednosti zvezne funkcije vemo, da obstaja tako število $\xi \in [a,b]$, da je $f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$. Tako lahko zapišemo končni rezultat:

Izrek 5.2.1. *Funkcija f naj bo dvakrat zvezno odvedljiva na $[a,b]$ in naj $T(h)$ pomeni približek k vrednosti integrala* (5.1)*, izračunan s trapeznim pravilom. Potem je*

$$\int_a^b f(x)\,dx - T(h) = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi).$$

Ta izrek pomeni, da lahko s trapeznim pravilom izračunamo približek, ki se od točne vrednosti integrala poljubno malo razlikuje, če le izračunamo vrednost funkcije, ki jo integriramo, v dovolj točkah. Ker je napaka sorazmerna h^2, se napaka zmanjša približno na četrtino, če podvojimo število točk.

Zapišimo algoritem, s katerim bomo lahko izračunali približek za določeni integral s pomočjo trapeznega pravila pri dani delitvi intervala:

Algoritem 5.2.1 (Trapezno pravilo)**.** Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ in n neko naravno število. Naslednji algoritem izračuna približek T k vrednosti določenega integrala (5.1) s pomočjo trapeznega pravila.

$h = (b - a)/n$
$T = (f(a) + f(b))/2$
for $i = 1 : n - 1$
    $T = T + f(a + i * h)$
end
$T = T * h$

n	h	$T(h)$	$T(h) - I$
1	3	4.5000000	$-1.7 \cdot 10^{-1}$
2	1.5	4.6217082	$-4.5 \cdot 10^{-2}$
5	0.6	4.6592278	$-7.4 \cdot 10^{-3}$
10	0.3	4.6647957	$-1.9 \cdot 10^{-3}$
100	0.03	4.6666479	$-1.9 \cdot 10^{-5}$
1000	0.003	4.6666665	$-1.9 \cdot 10^{-7}$

Tabela 5.1: Približki za integral (5.6), izračunani s trapeznim pravilom

Primer 5.2.1. S pomočjo trapeznega pravila izračunajmo vrednost integrala

$$I = \int_3^6 \sqrt{x-2}\, dx = \frac{14}{3} \tag{5.6}$$

za vrednosti $n = 1, 2, 5, 10, 100$ in 1000.

Vrednosti približkov in ustrezne napake so v tabeli 5.1. Opazimo lahko, da je napaka trapeznega pravila res sorazmerna kvadratu dolžine podintervalov h. ∎

5.3 Metoda nedoločenih koeficientov

Iz napake trapeznega pravila vidimo, da s pomočjo (5.5) izračunamo natančno integral vsakega linearnega polinoma. To lahko posplošimo: konstruirajmo integracijsko formulo, ki bo natančno integrirala vse polinome, katerih stopnja ni večja od n. Ker je polinom stopnje n določen z izbiro $n+1$ prostih parametrov, lahko pričakujemo, da bomo tudi za integracijsko formulo potrebovali izračun vrednosti integranda f v $n+1$ točkah (*vozlih*). Tako bo imela iskana integracijska formula obliko

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(c_i) + R; \quad c_i = a + ih. \tag{5.7}$$

(Opomba: Tukaj smo vozle izbrali enakomerno na intervalu $[a, a+nh]$, kar pa ni nujno. Tudi če bi abscise izbrali poljubno, bi po postopku, ki ga bomo sedaj opisali, lahko konstruirali ustrezne integracijske formule.)

Izpeljavo integracijskih formul z metodo nedoločenih koeficientov si oglejmo na konkretnem primeru. Vzemimo integracijsko formulo oblike

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = a_0 f(0) + a_1 f(h) + a_2 f(2h) + R \tag{5.8}$$

in določimo njene *uteži* a_0, a_1 in a_2 tako, da bo formula točna za vse kvadratne polinome.

V formulo (5.8) vstavimo namesto funkcije f zaporednoma polinome $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ in $p_2(x) = x^2$ in dobimo za uteži sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & + & a_1 & + & a_2 & = & 2h \\ & & a_1 & + & 2a_2 & = & 2h \\ & & a_1 & + & 4a_2 & = & \frac{8h}{3}, \end{array}$$

ki ima rešitev $a_0 = a_2 = h/3$; $a_1 = 4h/3$. Tako smo dobili popularno *Simpsonovo*[1] *integracijsko formulo*

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(0) + 4f(h) + f(2h)] + R. \tag{5.9}$$

[1]Thomas Simpson (1710 Market Bosworth – 1761 Market Bosworth, Anglija), angleški matematik, samouk. Integracijsko metodo, ki danes nosi njegovo ime, je objavil v svoji knjigi *The Doctrine and Application of Fluxions* leta 1750.

Če v formulo (5.9) vstavimo kubični polinom $f(x) = x^3$, in za napako predvidimo izraz $R = Cf'''(\xi)$, dobimo za konstanto napake C enačbo

$$\frac{(2h)^4}{4} = \frac{h}{3}(4h^3 + 8h^3) + 6Ch^4,$$

od koder izračunamo $C = 0$, kar pomeni, da je enostavna Simpsonova formula natančna tudi za polinome tretje stopnje. Da bi lahko izračunali konstanto napake, moramo v formulo (5.9) vstaviti polinom četrte stopnje $f(x) = x^4$, za napako pa predvidimo izraz $R = Df^{(4)}(\xi)$, od koder izračunamo

$$\frac{(2h)^5}{5} = \frac{h}{3}(4h^4 + 16h^4) + 24D.$$

Tako je $D = -h^5/90$, torej

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(0) + 4f(h) + f(2h)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi). \tag{5.10}$$

Podobno kot trapezno formulo (5.4), lahko tudi Simpsonovo formulo uporabimo za računanje integralov na poljubnih intervalih tako, da interval razdelimo na $2n$ enakih podintervalov in na vsakem paru od njih uporabimo Simpsonovo formulo. Tako dobimo *Simpsonovo pravilo*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots \\ + \quad 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)] + R,\end{aligned}$$

kjer je $h = (b-a)/2n$. Napaka je enaka

$$R = -h^4(b-a)f^{(4)}(\xi)/180, \tag{5.11}$$

kjer je ξ neka točka na (a, b).

Zapišimo še algoritem za izračun integrala s Simpsonovim pravilom:

Algoritem 5.3.1 (Simpsonovo pravilo)**.** Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ in n neko naravno število. Naslednji algoritem izračuna približek S k vrednosti določenega integrala (5.1) s pomočjo Simpsonovega pravila.

$h = (b - a)/(2 * n)$
$S = f(a) + f(b) + 4 * f(a + h)$
for $i = 1 : n - 1$
    $S = S + 2 * f(a + 2 * i * h) + 4 * f(a + 2 * i * h + h)$
end
$S = S * h/3$

n	h	$S(h)$	$S(h) - I$
1	1.5	4.66227766016838	$-4.39 \cdot 10^{-3}$
2	0.75	4.66622070830639	$-4.46 \cdot 10^{-4}$
5	0.3	4.66665163029280	$-1.50 \cdot 10^{-5}$
10	0.15	4.66666566830214	$-9.98 \cdot 10^{-7}$
100	0.015	4.66666666656452	$-1.02 \cdot 10^{-10}$
1000	0.0015	4.66666666666665	$-1.78 \cdot 10^{-14}$

Tabela 5.2: Približki za integral (5.6), izračunani s Simpsonovo formulo

Primer 5.3.1. Vrednost integrala

$$I = \int_3^6 \sqrt{x - 2}\, dx = \frac{14}{3} \tag{5.12}$$

za vrednosti $n = 1, 2, 5, 10, 100$ in 1000 izračunajmo še s pomočjo Simpsonovega pravila.

Vrednosti približkov in ustrezne napake so v tabeli 5.2. Napaka v zadnjem stolpcu je res približno sorazmerna četrti potenci dolžine podintervalov h, kot predvideva ocena (5.11). ■

5.4 Računanje singularnih integralov

Večkrat se zgodi, da ima funkcija, katere določeni integral moramo izračunati, na integracijskem intervalu singularnost, npr.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2. \tag{5.13}$$

V tem primeru ne moremo uporabiti trapezne ali Simpsonove formule, ker je vrednost funkcije v točki $x = 0$ nedefinirana. Z metodo nedoločenih koeficientov iz prejšnjega razdelka bi sicer lahko konstruirali integracijsko formulo, ki ne bi vsebovala točke 0 kot abscise, vendar bi dobili še vedno dokaj slab približek, saj napaka take formule vsebuje ustrezni višji odvod funkcije, ta pa je neomejen. Boljša rešitev je, da singularnost upoštevamo že pri konstrukciji integracijske formule same. Kako to naredimo, si oglejmo kar na zgledu integrala

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\, dx,$$

kjer je funkcija $f(x)$ na intervalu $[0, 1]$ regularna.

Z metodo nedoločenih koeficientov bomo določili uteži integracijske formule, ki ima abscisi v točkah 0 in 1:

$$I \approx a_0 f(0) + a_1 f(1)$$

tako, da bo le-ta natančna za konstante in linearne polinome. Ko za $f(x)$ vstavimo konstanto 1, dobimo prvo enačbo

$$\int_0^1 x^{-1/2}\, dx = 2 = a_0 + a_1,$$

pri $f(x) = x$ pa dobimo drugo enačbo

$$\int_0^1 x^{1/2}\, dx = \frac{2}{3} = a_1.$$

Rešitvi tega sistema sta $a_0 = 4/3$ in $a_1 = 2/3$, tako da imamo integracijsko formulo

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\, dx \approx \frac{4}{3} f(0) + \frac{2}{3} f(1). \tag{5.14}$$

Kadar želimo izračunati podoben integral na drugem intervalu, npr. na $[a, a+h]$, moramo zamenjati spremenljivko: $t = a + hx$, torej

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_a^{a+h} \frac{f(\frac{t-a}{h})}{\sqrt{t-a}}\, dt,$$

tako da je integracijska formula v tem primeru

$$\int_a^{a+h} \frac{f(t)}{\sqrt{t-a}}\, dt \approx \sqrt{h} \left(\frac{4}{3} f(a) + \frac{2}{3} f(a+h) \right). \tag{5.15}$$

Na isti način lahko tudi pri podobnih singularnih integralih izračunamo uteži integracijske formule oblike

$$\int_a^{a+h} w(x)f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} a_i f(a + c_i h),$$

kjer je funkcija $f(x)$ regularna, $w(x)$ singularna na $[a, a + h]$, števila c_i; $i = 1, \ldots, n$ (vozli integracijske formule) pa poljubna, med seboj različna na $[0, 1]$.

Kadar računamo vrednost singularnega integrala s sestavljeno integracijsko formulo (npr. Simpsonovim pravilom), lahko na vseh podintervalih, kjer je funkcija regularna, uporabimo Simpsonovo formulo, le na podintervalih, kjer ima funkcija singularnost moramo uporabiti posebno formulo za singularne integrale.

Primer 5.4.1. Z integracijsko formulo (5.15) izračunajmo približek za vrednost integrala

$$\int_0^{0.1} \left(\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\sin x \right) dx$$
$$\approx \sqrt{0.1}\,\frac{2 + \cos 0.1 - 0.2\sin 0.1}{3} \approx 0.31360.$$

Točna vrednost tega integrala je

$$\sqrt{0.1}\cos 0.1 \approx 0.31465.$$

Če hočemo natančnejši rezultat, moramo interval $[0, 0.1]$ razdeliti na več podintervalov, na prvem uporabimo formulo (5.14), na ostalih pa trapezno ali Simpsonovo pravilo. ■

5.5 Izbira koraka

Iz približka za napako trapeznega pravila

$$T(h) - I = (b - a)\frac{h^2}{12} f''(\xi)$$

(izrek 5.2.1) lahko sklepamo, kako se zmanjšuje napaka, ko $h \to 0$. Za praktično ocenjevanje napake ta formula ni primerna, saj zahteva poznavanje drugega odvoda funkcije f. Da bi dobili izračunljiv približek za velikost napake, izračunamo s trapezno formulo približek tudi pri polovični dolžini koraka in dobimo približno 4-krat manjšo napako

$$T(h/2) - I = \frac{h^2}{4}\frac{b-a}{12}f''(\eta),$$

kjer je $\eta \in [a,b]$ različen od ξ. Kljub temu pa lahko smatramo napako $(b-a)f''/12$ kot 'približno' konstanto[2] (označili jo bomo s C), zato lahko iz enačb

$$\begin{aligned} I &= T(h) - Ch^2 + O(h^4) \\ I &= T(h/2) - \frac{C}{4}h^2 + O(h^4) \end{aligned}$$

izračunamo glavni del napake tako, da ti enačbi odštejemo

$$T(h) - T(h/2) = \frac{3}{4}Ch^2 + O(h^4), \tag{5.16}$$

zato je

$$Ch^2 \approx \frac{4}{3}(T(h) - T(h/2)).$$

Tako je $4(T(h)-T(h/2))/3$ uporabni približek za napako $T(h)-I$ (in $(T(h)-T(h/2))/3$ približek za napako $T(h/2)-I$). Pri računanju $T(h/2)$ pri tem ni potrebno računati vrednosti funkcije f v abscisah, ki smo jih že uporabili pri računanju $T(h)$, ker velja

$$T(h/2) = \frac{T(h)}{2} + \frac{h}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} f(a + (i-1/2)h)\right),$$

kjer smo z n označili $n = (b-a)/h$.

Če želimo izračunati približek $T(h)$ za I, da bo $|T(h)-I| < \varepsilon$, izračunamo najprej $T(b-a) = (b-a)(f(a)+f(b))/2$ in

$$T\left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{T(b-a)}{2} + \frac{b-a}{2}f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

[2] Pravzaprav lahko napako trapeznega pravila kot funkcijo dolžine koraka h razvijemo v potenčno vrsto, ki vsebuje le sode potence spremenljivke h:

$$f''(\eta) = f''(\zeta) + C_1h^2 + C_2h^4 + \cdots,$$

kar bomo uporabili kasneje pri Rombergovi metodi.

ter približek za napako $(T(b-a)-T((b-a)/2))/3$. Če je absolutna vrednost približka za napako manjša od predpisane natančnosti ε, je $T((b-a)/2)$ dovolj dober približek za I, sicer korak h razpolovimo in izračun ponovimo.

Celoten postopek zapišimo kot algoritem:

Algoritem 5.5.1 (Trapezno pravilo s kontrolo napake)**.** Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$, N neko naravno število in $\varepsilon > 0$. Naslednji algoritem izračuna s pomočjo trapezne formule približek T, ki se od vrednosti določenega integrala (5.1) razlikuje manj kot ε ali pa se po N razpolovitvah dolžine koraka konča brez rezultata ($T = NaN$).

```
e = 2 * ε
m = 0
h = b − a
T = h * (f(a) + f(b))/2
while (m < N)&(abs(e) > ε)
    m = m + 1
    h = h/2                 % Ponovno, s polovičnim korakom
    k = 2ˆ(m − 1)           % Nove abscise
    s = 0
    for i = 1 : k
        s = s + f(a + (2 * i − 1) * h)
    end
    e = s * h − T/2;        % Približek za napako
    T = T + e               % Nov približek
end
if abs(e) > ε
    T = NaN                 % Približek ni dober
end
```

Primer 5.5.1. Izračunajmo približek za vrednost integrala (5.12) še z algoritmom 5.5.1 pri različnih vrednostih parametra ε.

Rezultati so v tabeli 5.3. Opazimo lahko, da je napaka $T(h) - I$ vedno manjša od predpisane natančnosti ε. ■

ε	n	h	$T(h)$	$T(h)-I$
10^{0}	2^{1}	$1.5\cdot 10^{-0}$	4.621708245	$-4.5\cdot 10^{-2}$
10^{-1}	2^{2}	$7.5\cdot 10^{-1}$	4.655092593	$-1.2\cdot 10^{-2}$
10^{-2}	2^{3}	$3.7\cdot 10^{-1}$	4.663746678	$-2.9\cdot 10^{-3}$
10^{-3}	2^{5}	$9.4\cdot 10^{-2}$	4.666483600	$-1.8\cdot 10^{-4}$
10^{-4}	2^{7}	$2.3\cdot 10^{-2}$	4.666655223	$-1.1\cdot 10^{-5}$
10^{-5}	2^{8}	$1.2\cdot 10^{-2}$	4.666663806	$-2.9\cdot 10^{-6}$
10^{-6}	2^{10}	$2.9\cdot 10^{-3}$	4.666666488	$-1.8\cdot 10^{-7}$
10^{-7}	2^{12}	$7.3\cdot 10^{-4}$	4.666666655	$-1.1\cdot 10^{-8}$
10^{-8}	2^{13}	$3.7\cdot 10^{-4}$	4.666666664	$-2.8\cdot 10^{-9}$

Tabela 5.3: Približki za integral (5.6), izračunani s trapezno metodo s kontrolo napake pri različnih ε

Adaptivna izbira koraka Sestavljena pravila, ki smo jih opisali do sedaj, so temeljila na delitvi integracijskega intervala na *enake* podintervale. Ta izbira je naravna in včasih (predvsem kadar imamo integracijsko funkcijo znano le v posameznih, enakomerno razporejenih točkah) edina možna. Kadar pa znamo vrednost funkcije f izračunati v vsaki točki integracijskega intervala, je včasih bolje razdeliti celoten interval na podintervale, katerih dolžine so odvisne od obnašanja funkcije na vsakem od podintervalov. To nam omogoča, da izračunamo približno vrednost integrala s predpisano natančnostjo z manj računanji funkcijske vrednosti, kot če bi bili vsi podintervali enake dolžine.

Vzemimo za primer *splošno* trapezno pravilo

$$I=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)]-\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i^3}{12}f''(\xi_i),$$

kjer so delilne točke $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, ne nujno enakomerno razporejene in $h_i=x_i-x_{i-1}$. Pri tem je prispevek podintervala $[x_{i-1},x_i]$ k celotni napaki enak

$$-\frac{h_i^3}{12}f''(\xi_i)\quad \text{za neki}\quad \xi_i\in(x_{i-1},x_i)$$

in je odvisen od dolžine h_i podintervala in od vrednosti $f''(x)$ na podintervalu (x_{i-1},x_i). Tako lahko na tistem delu intervala $[a,b]$, kjer je $f''(x)$ majhen, vzamemo 'dolge' podintervale, kjer je $f''(x)$ velik, pa 'kratke', če hočemo, da bodo prispevki delnih napak približno sorazmerni dožini podintervalov.

Integracijske metode, ki sproti prilagajajo dolžine podintervalov glede na lokalno obnašanje integranda, imenujemo *adaptivne*. Glavna težava, s katero se srečujemo pri adaptivnih metodah je, da ne poznamo odvoda, ki nastopa v izrazu za napako, zato moramo, podobno kot v algoritmu 5.5.1, napako sproti ocenjevati.

Opisali bomo adaptivno integracijsko metodo na osnovi trapezne formule. Podobno bi lahko za osnovo adaptivne metode vzeli Simpsonovo ali kakšno drugo formulo.

Želimo izračunati približek, ki se od prave vrednosti integrala (5.1) ne bo razlikoval za več kot ε in pri tem čimmanjkrat izračunati vrednost funkcije f.

Vrednost integrala na vsakem od podintervalov

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

računamo dvakrat s trapezno formulo:

$$\begin{aligned} T(h_i) &= \frac{h_i}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)], \\ T(h_i/2) &= T(h_i)/2 + \frac{h_i}{2} f(x_{i-1} + h_i/2), \end{aligned} \tag{5.17}$$

da dobimo

$$\begin{aligned} I_i &= T(h_i) - C h_i^3 + O(h_i^5) \\ I_i &= T(h_i/2) - 2\frac{C}{8} h_i^3 + O(h_i^5). \end{aligned}$$

Iz teh dveh približkov lahko ocenimo napako (pravzaprav konstanto C) podobno kot z enačbo (5.16):

$$T(h_i) - T(h_i/2) = \frac{3C}{4} h_i^3 + O(h_i^5), \tag{5.18}$$

tako da je napaka na tem intervalu približno enaka

$$I_i - T(h_i/2) \approx \frac{T(h_i) - T(h_i/2)}{3}.$$

Če naj bo napaka integrala na celotnem intervalu $[a, b]$ manjša od ε, je smiselna zahteva, naj bo napaka na podintervalu z dolžino h_i manjša od $h_i\varepsilon/(b-a)$. Delni rezultat (5.17) torej sprejmemo, če je

$$\frac{|T(h_i) - T(h_i/2)|}{3} < h_i\varepsilon/(b-a),$$

sicer pa moramo vzeti manjši podinterval. Na osnovi ocene napake tudi lahko določimo optimalno dolžino naslednjega podintervala. Ker mora napaka na naslednjem koraku zadoščati neenačbi

$$\frac{C}{4}h_{i+1}^3 < \frac{\varepsilon h_{i+1}}{b-a},$$

izberemo dolžino koraka

$$h_{i+1} = \sigma\sqrt{\frac{3\varepsilon h_i^3}{(b-a)|T(h_i) - T(h_i/2)|}},$$

kjer smo s σ označili 'varnostni koeficient', ki ga navadno izberemo malo manj kot 1 (npr. $\sigma = 0.9$).

Zapišimo celoten algoritem

Algoritem 5.5.2 (Adaptivno trapezno pravilo)**.** Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ in $\varepsilon > 0$. Naslednji algoritem izračuna s pomočjo trapezne formule približek I, ki se od vrednosti določenega integrala (5.1) razlikuje manj kot ε.

$\sigma = 0.9$
$x = a$
$I = 0$
$h = b - a$
$f_x = f(a)$
$f_{xh} = f(b)$
while $x < b$
    $f_{xh/2} = f(x + h/2)$
    $T_1 = h * (f_x + f_{xh})/2$ % Najprej z osnovnim korakom
    $T_2 = T_1/2 + h * f_{xh/2}/2$ % Ponovno, s polovičnim korakom

```
    if abs((T_1 − T_2)/3) < h ∗ ε/(b − a)
        x = x + h                  % Rezultat sprejet
        I = I + T_2                % Prištejemo delni rezultat
        f_x = f_xh
        h = σ ∗ sqrt(3 ∗ h^3 ∗ ε/abs(T_1 − T_2)/(b − a))
                                   % novi korak
        if x + h > b               % Ali smo že blizu konca?
            h = b − x
        end
        f_xh = f(x + h)
    else                           % Rezultat zavrnjen
        h = h/2                    % Razpolovimo korak
        f_xh = f_xh/2              % Vrednost v končni točki
    end
end
```

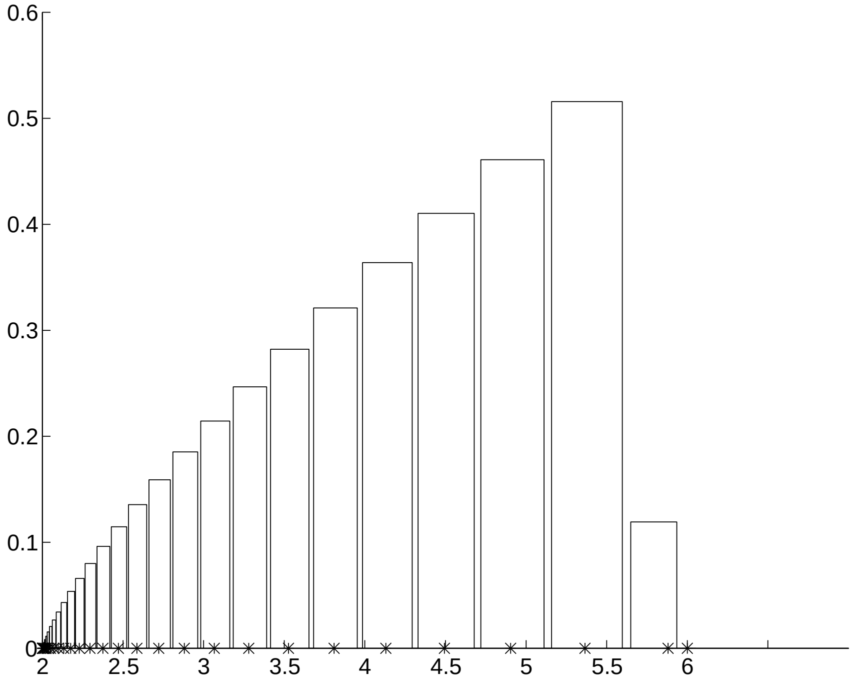
ε	M_f	N_f
10^{0}	4	3
10^{-1}	13	17
10^{-2}	38	65
10^{-3}	87	257
10^{-4}	211	1025
10^{-5}	578	8193
10^{-6}	1709	?
10^{-7}	5251	?

Tabela 5.4: Število izračunov funkcije f pri računanju vrednosti integrala (5.19) s trapeznim pravilom s kontrolo napake in z adaptivnim trapeznim pravilom

Primer 5.5.2. Izračunajmo približno vrednost integrala

$$\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx \tag{5.19}$$

z algoritmoma 5.5.1 in 5.5.2 pri različnih vrednostih parametra ε.



Slika 5.2: Spreminjanje dolžine koraka pri adaptivni integraciji

Rezultati so v tabeli 5.4. V stolpcu N_f je število izračunov vrednosti funkcije f z algoritmom 5.5.1, v koloni M_f pa število izračunov z adaptivnim algoritmom 5.5.2. Vsi izračunani rezultati zadoščajo zahtevani natančnosti. Prepričamo se lahko, da je adaptivni algoritem precej bolj učinkovit, saj prilagaja korak integracije lokalnemu obnašanju funkcije. Ta se v našem primeru hitro spreminja v bližini spodnje meje, kjer je potreben zelo majhen korak, nato pa je proti zgornji meji vse bolj položna in zato tam lahko uporabimo mnogo daljši korak. Algoritem s kontrolo napake je pri večjih natančnostih zahteval preveliko število funkcijskih izračunov, kar je v tabeli označeno z "?". Na sliki 5.2 je prikazano, kako adaptivni algoritem 5.5.2 spreminja dolžino koraka pri natančnosti $\varepsilon = 10^{-3}$. ■

5.6 Rombergova metoda

Kadar je funkcija, ki jo integriramo vsaj $2k+2$-krat odvedljiva, se da pokazati, da lahko napako trapezne formule razvijemo v konvergentno vrsto po sodih potencah h:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = T(h) + C_1h^2 + C_2h^4 + C_3h^6 + \cdots + C_kh^{2k} + O(h^{2k+2}),$$

kjer konstante $C_1, \ldots, C_k$ niso odvisne od h. Že v (5.16) smo izračunali približek za napako trapezne formule tako, da smo izračunali $T(h)$ in $T(h/2)$ in dobili

$$C_1h^2 = \frac{4}{3}[T(h) - T(h/2)] + O(h^4).$$

Če za vrednost te približne napake popravimo rezultat, dobimo boljši približek za I

$$T_1(h/2) = T(h) - \frac{4}{3}[T(h) - T(h/2)] = \frac{4T(h/2) - T(h)}{3},$$

tako da je

$$I = T_1(h/2) + C_2^1h^4 + O(h^6), \tag{5.20}$$

kjer je C_2^1 spet neka konstanta, neodvisna od h. Če izračunamo še

$$T_1(h/4) = \frac{4T(h/4) - T(h/2)}{3},$$

za katerega velja

$$I = T_1(h/4) + \frac{C_2^1}{16}h^4 + O(h^6), \tag{5.21}$$

lahko enačbi (5.20) in (5.21) odštejemo:

$$0 = T_1(h/2) - T_1(h/4) + \frac{15}{16}C_2^1h^4 + O(h^6).$$

Ko iz te enačbe izračunamo napako in popravimo rezultat, dobimo

$$T_2(h/4) = \frac{16T_1(h/4) - T_1(h/2)}{15},$$

za katerega velja

$$I = T_2(h/4) + C_3^2h^6 + O(h^8),$$

kjer je C_3^2 zopet neka konstanta, neodvisna od h. Tako lahko nadaljujemo in dobimo na k-tem koraku

$$T_k(h/2^k) = \frac{4^k T_{k-1}(h/2^k) - T_{k-1}(h/2^{k-1})}{4^k - 1}, \tag{5.22}$$

in velja

$$I = T_k(h/2^k) + C_{k+1}^k h^{2k+2} + O(h^{2k+4}).$$

Da bi iz enačbe (5.22) izračunali $T_k(h/2^k)$, moramo prej izračunati vrednosti $T_{k-1}(h/2^{k-1})$ in $T_{k-1}(h/2^k)$, da bi jih izračunali, potrebujemo tudi $T_{k-2}(h/2^{k-2})$, $T_{k-2}(h/2^{k-1})$ in $T_{k-2}(h/2^k)$, ... in končno $T(h/2^k), \ldots, T(h/2)$ in $T(h)$. Vse te vrednosti najlaže predstavimo v obliki *Rombergove*[3] *tabele*

$$\begin{array}{lllll} T(h) & & & & \\ T(h/2) & T_1(h/2) & & & \\ T(h/4) & T_1(h/4) & T_2(h/4) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ T(h/2^k) & T_1(h/2^k) & T_2(h/2^k) & \cdots & T_k(h/2^k) \end{array} \tag{5.23}$$

Opomba: Približki v drugem stolpcu tabele T_1 so isti, kot če bi jih izračunali s Simpsonovim pravilom (problem 2).

Zapišimo algoritem, ki bo izračunal Rombergove približke:

Algoritem 5.6.1 (Rombergova metoda)**.** Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ in k naravno število. Naslednji algoritem izračuna približke $T_n(h/2^m)$ iz Rombergove tabele.

```
h = b − a
T(1, 1) = h ∗ (f(a) + f(b))/2
for m = 2 : k + 1
    h = h/2
    T(m, 1) = T(m − 1, 1)/2
    s = 0
    for i = 1 : 2ˆ(m − 2)
        s = s + f(a + (2 ∗ i − 1) ∗ h)
    end
```

[3] Werner Romberg (1909 Berlin – 2003 Heidelberg), nemški matematik. Pred nacizmom se je omaknil na Norveško in kasneje na Švedsko, po vojni je bil profesor v Trondheimu in kasneje v Heidelbergu. Ukvarjal se je z numerično analizo in uporabno matematiko.

$T(m,1) = T(m,1) + h * s$
for $n = 2 : m$
$T(m,n) = (4\hat{}(n-1) * T(m,n-1) - T(m-1,n-1))/$
$(4\hat{}(n-1) - 1)$
end
end

Primer 5.6.1. Izračunajmo približek za vrednost integrala (5.12) še z Rombergovo metodo (algoritem 5.6.1). Izberimo vrednost parametra $k = 5$. V tabeli 5.5 so napake posameznih približkov. Iz rezultatov vidimo, da so približki vse bolj natančni, ko gremo po posameznem stolpcu navzdol, kar pomeni vse krajši korak h trapezne formule. Prav tako pa opazimo, da se napake manjšajo, ko gremo po posamezni vrstici z leve proti desni, kar pomeni vse natančnejše integracijske formule. Vidimo tudi, da se to zmanjševanje napake ustavi, kar je posledica zaokrožitvenih napak, saj so rezultati izračunani pri osnovni zaokrožitveni napaki $\approx 2.2 \cdot 10^{-16}$.

m	$I-T$	$I-T_1$	$I-T_2$	$I-T_3$	$I-T_4$	$I-T_5$
1	$1.6 \cdot 10^{-1}$					
2	$4.5 \cdot 10^{-2}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$				
3	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$			
4	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-5}$	$7.9 \cdot 10^{-6}$	$5.1 \cdot 10^{-6}$		
5	$7.3 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$9.3 \cdot 10^{-8}$	$7.3 \cdot 10^{-8}$	
6	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$4.2 \cdot 10^{-9}$	$8.9 \cdot 10^{-10}$	$5.3 \cdot 10^{-10}$	$4.6 \cdot 10^{-10}$

Tabela 5.5: Napake posameznih približkov integrala (5.12), izračunanih z Rombergovo metodo

■

5.7 Numerično odvajanje

Poglejmo si še, kako lahko numerično izračunamo vrednost odvoda f' funkcije f v določeni točki. Ker je odvod funkcije f v točki x definiran kot

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

dobimo najenostavnejšo formulo (*direktno formulo*) za izračun odvoda tako, da vzamemo dovolj majhen h in je

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{5.24}$$

Da bi ugotovili, kakšna je napaka pri uporabi formule (5.24), razvijemo $f(x+h)$ (predpostavimo, da je f vsaj dvakrat odvedljiva) po Taylorjevi[4] formuli

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi),$$

kjer je ξ neka točka med x in $x+h$. Tako dobimo

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \tag{5.25}$$

torej je napaka približka, izračunanega s formulo (5.24), sorazmerna h.

Do natančnejših formul za numerično računanje odvoda lahko pridemo bodisi z odvajanjem interpolacijskega polinoma, bodisi z metodo nedoločenih koeficientov. Poglejmo si oba načina na preprostih primerih.

Odvajanje interpolacijskega polinoma. Naj bo $p_1(x)$ linearni polinom, ki interpolira vrednosti funkcije f v točkah $x_0 - h$ in x_0, torej po Newtonovi interpolacijski formuli (4.7)

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(x_0 - h) + f[x_0 - h, x_0](x - (x_0 - h)) \\ &= f(x_0 - h) + \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}(x - x_0 + h), \end{aligned}$$

kar odvajamo

$$f'(x) \approx p_1'(x) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}.$$

Tako smo dobili *obratno formulo*, ki je podobna, kot direktna formula (5.24), le da h zamenjamo z $-h$, zato je tudi napaka te formule enaka $hf''(\eta)/2$, le da je točka η v tem primeru med $x_0 - h$ in x_0. Na podoben način dobimo lahko tudi natančnejše formule za izračun vrednosti odvoda, če za osnovo vzamemo interpolacijski polinom skozi več točk.

---

[4]Brook Taylor (1685 Edmonton – 1731 London), angleški matematik, danes predvsem poznan po Taylorjevi vrsti. Objavil jo je leta 1715 v svoji knjigi *Methodus incrementorum directa et inversa*. Podoben rezultat je opisal Johan Bernoulli že leta 1694.

Metoda nedoločenih koeficientov. Odvod funkcije f aproksimiramo kot linearno kombinacijo njenih vrednosti v sosednjih točkah — vzemimo kar točke $x_0 - h$, x_0 in $x_0 + h$:

$$f'(x_0) \approx Af(x_0 - h) + Bf(x_0) + Cf(x_0 + h). \tag{5.26}$$

Da bi lahko izračunali koeficiente A, B in C, zapišimo aproksimaciji za $f(x_0 - h)$ in $f(x_0 + h)$ po Taylorjevi formuli

$$\begin{aligned} f(x_0 - h) &= f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \cdots \\ f(x_0) &= f(x_0) \\ f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \cdots . \end{aligned}$$

Dobljene razvoje vstavimo v enačbo (5.26) in dobimo

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= (A + B + C)f(x_0) + (-A + C)hf'(x_0) \\ &+ \frac{A + C}{2}h^2 f''(x_0) + \frac{-A + C}{6}h^3 f'''(x_0) + \cdots . \end{aligned} \tag{5.27}$$

S primerno izbiro konstant A, B in C lahko eliminiramo člena, ki vsebujeta f in f'', konstanta pri f' pa mora biti enaka $1/h$. Tako lahko zapišemo sistem enačb za konstante A, B in C

$$\begin{array}{rcrcrcr} A & + & B & + & C & = & 0 \\ -A & & & + & C & = & 1/h \\ A & & & + & C & = & 0, \end{array}$$

ki ima rešitev $A = -1/2h$, $B = 0$ in $C = 1/2h$, od koder dobimo *sredinsko formulo* za izračun odvoda

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}. \tag{5.28}$$

Napako te formule izračunamo tako, da funkcijo

$$f'(x_0) - \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}\right) \tag{5.29}$$

razvijemo po Taylorjevi formuli. Tako pridemo do rezultata

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) + O(h^3), \tag{5.30}$$

Iz primerjave direktne, obratne in sredinske formule vidimo, da je sredinska natančnejša od ostalih dveh, saj ima napaka faktor h^2 v primerjavi z direktno in obratno, ki imata obe v napaki faktor h.

Drugi odvod Podobno kot smo z nastavkom (5.27) izrazili prvi odvod, lahko z linearno kombinacijo funkcijskih vrednosti $f(x_0-h)$, $f(x_0)$ in $f(x_0+h)$ izrazimo tudi drugi odvod $f''(x_0)$:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &\approx (A+B+C)f(x_0)+(-A+C)hf'(x_0) \\ &+\frac{A+C}{2}h^2f''(x_0)+\frac{-A+C}{6}h^3f'''(x_0)\ldots, \end{aligned} \tag{5.31}$$

od koder za koeficiente A, B in C dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcccccl} A & + & B & + & C & = & 0 \\ -A & & & + & C & = & 0 \\ A & & & + & C & = & 2/h^2, \end{array}$$

katerega rešitev je $A = C = 1/h^2$ in $B = -2/h^2$. Tako smo prišli do formule za izračun drugega odvoda

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)}{h^2}.$$

Njeno napako izračunamo tako, da funkcijo

$$f''(x_0) - \left(\frac{f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)}{h^2}\right)$$

razvijemo po Taylorjevi formuli, od koder dobimo

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x_0)+O(h^5). \tag{5.32}$$

Vpliv nenatančnih funkcijskih vrednosti. Napake v funkcijskih vrednostih lahko zelo zmanjšajo uporabnost formul za numerično odvajanje.

Oglejmo si njihov vpliv pri direktni formuli (5.24). Če so funkcijske vrednosti poznane natančno, je napaka direktne formule

$$f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\frac{h}{2}f''(\xi),$$

torej je napaka poljubno majhna, ko $h \to 0$.

Navadno pa funkcije f ne poznamo povsem natančno, ampak le njen približek

$$\hat{f}(x) = f(x) + e(x),$$

kjer smo s funkcijo e označili napako pri računanju vrednosti funkcije f. Predpostavimo tudi, da je ta napaka omejena

$$|e(x)| \leq \varepsilon$$

na intervalu, ki nas zanima. Dejansko tako izračunamo

$$\hat{f}'(x_0) \approx \frac{\hat{f}(x_0+h) - \hat{f}(x_0)}{h},$$

pri čemer velja

$$\frac{\hat{f}(x_0+h) - \hat{f}(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{e(x_0+h) - e(x_0)}{h},$$

od koder dobimo oceno

$$\left| \frac{\hat{f}(x_0+h) - \hat{f}(x_0)}{h} - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{h}.$$

Če to vstavimo v enačbo (5.25), dobimo za dejansko napako pri izračunu vrednosti odvoda oceno

$$\left| \frac{\hat{f}(x_0+h) - \hat{f}(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| \leq \frac{2\varepsilon}{h} + \frac{h}{2}|f''(\xi)|.$$

Ta ocena pomeni, da vrednosti odvoda funkcije ne moremo izračunati s poljubno natančnostjo. Za velike h predstavlja glavni del napake člen $\frac{h}{2} f''(\xi)$, pri majhnih h pa člen $\frac{2\varepsilon}{h}$. Celotna napaka je najmanjša, kadar sta prispevka obeh členov enaka, to je, kadar je $|f''(\xi)|h/2 = 2\varepsilon/h$, oziroma za

$$h = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{|f''(\xi)|}}, \tag{5.33}$$

kar pomeni, da ocena za napako ne more biti manjša kot $2\sqrt{\varepsilon|f''(\xi)|}$, ne glede na to, s kakšnim h računamo.

Primer 5.7.1. Izračunajmo vrednost odvoda eksponentne funkcije e^x v točki $x = 0$ z direktno formulo pri različnih korakih h med 1 in 10^{-13} in tabelirajmo njihove napake (tabela 5.6).

Iz rezultatov vidimo, da je najmanjša napaka pri koraku $h = 10^{-8}$, kar se ujema s teoretično optimalnim korakom, izračunanim iz enačbe (5.33), ki je pri $\varepsilon = 2.2 \cdot 10^{-16}$ enak $h = 2\sqrt{2.2 \cdot 10^{-16}/e} \approx 10^{-8}$. ∎

h	napaka
10^{-0}	0.71828182845905
10^{-1}	0.05170918075648
10^{-2}	0.00501670841679
10^{-3}	0.00050016670838
10^{-4}	0.00005000166714
10^{-5}	0.00000500000696
10^{-6}	0.00000049996218
10^{-7}	0.00000004943368
10^{-8}	−0.00000000607747
10^{-9}	0.00000008274037
10^{-10}	0.00000008274037
10^{-11}	0.00000008274037
10^{-12}	0.00008890058234
10^{-13}	−0.00079927783736

Tabela 5.6: Napake pri računanju odvoda eksponentne funkcije e^x pri $x = 0$

5.8 Povzetek

Numerično računanje določenih integralov je praviloma enostavnejše od računanja odvodov. Spoznali smo dve metodi, ki sta uporabni tako za konstrukcijo integracijskih formul, kot tudi formul za numerično odvajanje. To sta metoda interpolacijskega polinoma, kjer funkcijo nadomestimo z interpolacijskim polinomom skozi dve ali več sosednjih točk, in metodo nedoločenih koeficientov, kjer zapišemo željeno formulo s še neznanimi koeficienti, ki jih potem določimo tako, da je dobljena formula čimbolj natančna.

Med integracijskimi formulami smo spoznali dve najpopularnejši, to sta trapezna in Simpsonova formula. Naučili smo se ugotavljati napako približkov za vrednost določenega integrala in določiti korak formule tako, da je napaka končnega rezultata znotraj vnaprej predpisane natančnosti. S pomočjo Rombergove metode smo se naučili izboljšati natančnost približkov, izračunanih z trapezno formulo.

Med formulami za numerično odvajanje smo spoznali direktno in obratno formulo, ter natančnejšo sredinsko formulo za izračun prvega odvoda, pa tudi formulo za izračun drugega odvoda. Prav tako smo spoznali, da napaka pri računanju odvoda funkcije ne more biti poljubno majhna.

5.9 Problemi

1. Enačbo (5.3) integriraj na intervalu $[a, a+h]$, da dobiš enostavno trapezno formulo (5.4).

2. Prepričaj se, da so približki, ki jih dobimo v drugem stolpcu Rombergove tabele (5.23) isti, kot bi jih dobili pri uporabi Simpsonovega pravila.

3. (a) Izračunaj uteži integracijske formule

$$\int_a^{a+4h} f(x)\,dx \approx h[Af(a+h) + Bf(a+2h) + Cf(a+3h)]$$

   (b) Kolikšna je napaka te integracijske formule?

   (c) Oceni velikost napake te integracijske formule za $a = 0$ in $f(x) = \cos(x)$.

   (d) Primerjaj to integracijsko formulo s trapezno in s Simpsonovo formulo.

4. (a) Izračunaj uteži integracijske formule

$$\int_a^{a+3h} f(x)\,dx \approx h[Af(a+h) + Bf(a+2h) + Cf(a+3h)]$$

   (b) Kolikšna je napaka te integracijske formule?

   (c) Izračunaj približno vrednost integrala

$$\int_0^{0.6} \sqrt{x}x^3\,dx.$$

   Kolikšna je napaka?

   (d) Primerjaj to integracijsko formulo s trapezno in s Simpsonovo formulo.

5. Vrednost integrala
$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$
lahko izračunamo z *enostavno sredinsko formulo*
$$\int_c^{c+h} f(x)\,dx \approx hf(c+\frac{h}{2}).$$
   (a) Zapiši *sestavljeno sredinsko pravilo* za izračun vrednosti integrala I pri dolžini koraka $h = \frac{b-a}{4}$
   (b) Kolikšna je napaka enostavne sredinske formule?
   (c) Izračunaj vrednost integrala $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ s sestavljenim sredinskim pravilom pri dolžini koraka $h = 0.25$.
   (d) Za primerjavo izračunaj vrednost istega integrala še s trapeznim pravilom pri isti dolžini koraka in primerjaj obe napaki.
6. Izpelji sredinsko formulo (5.28) za izračun vrednosti odvoda v točki tako, da odvajaš interpolacijski polinom skozi točke x_0-h, x_0 in x_0+h.
7. Izpelji formulo za izračun vrednosti drugega odvoda (5.32) tako, da odvajaš interpolacijski polinom skozi točke $x_0 - h$, x_0 in $x_0 + h$.