Diskretne strukture

Prvi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

6. oktober 2020

Naravna števila in matematična indukcija

Naravna števila

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Zakaj ničla?

- Računanje z 0 je bolj enostavno kot računanje z 1.
- S tem ne pridemo do težav (npr. dobra definiranost).
- 0 in 1 sta "edini" števki, ki nastopata v binarni aritmetiki.

Matematična indukcija. Naj za neko podmnožico A množice $\mathbb{N}$ velja:

1. $n_0 \in A$ za nek $n_0 \in \mathbb{N}$.
2. Iz $k \in A$ sledi $k + 1 \in A$.

Potem je

$$\boxed{A \supseteq \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}}.$$

Posebej, če je $n_0 = 0$, potem je $A = \mathbb{N}$.

Dokazovanje z matematično indukcijo

Želimo dokazati, da neka trditev (**indukcijska predpostavka**), v kateri nastopa ena številska spremenljivka n, velja za vsak n iz množice

$$\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\},$$

kjer je n_0 neko naravno število.

Dokazati moramo naslednje dve trditvi:

1. **Baza indukcije**: Trditev velja za n_0.
2. **Indukcijski korak**: Če indukcijska predpostavka velja za poljuben $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$, potem velja tudi za $k + 1$.

Posebej, če je $n_0 = 0$, potem trditev velja za vsa naravna števila.

Matematična indukcija - primeri

1. Dokaži, da za vsako naravno število k velja, da je vsota najmanjših k lihih naravnih števil enaka izrazu k^2.

2. Dokaži, da za vsoto prvih nekaj kubov naravnih števil velja zveza

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

3. Zaporedje Fibonaccijevih števil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

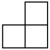
$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots,$$

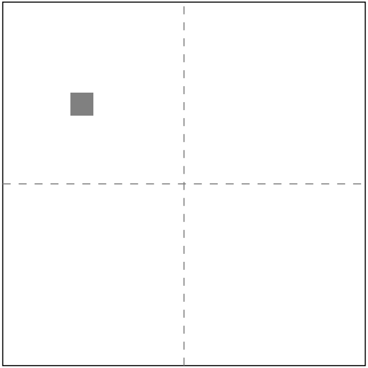
je definirano z začetnima členoma, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, in rekurzivno zvezo

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ ki velja za } n \geq 2.$$

Pokaži, da je Fibonaccijevo število f_{3n} vedno sodo.

Prebodena šahovnica

Iz šahovnice velikosti $2^n \times 2^n$ izrežemo eno kvadratno polje. Pokaži, da lahko takó pokvarjeno igralno ploščo tlakujemo s **trinominami** oblike .



Izjave

- **Izjava** je stavek, ki je bodisi **resničen** (ima vrednost 1) bodisi **neresničen** (imajo vrednost 0).
- Delitev izjav:
  - po **vsebini** na resnične in neresnične.
  - po **obliki** na osnovne in sestavljene.

Primer

Stavkom, za katere ne moremo preveriti njihove resničnosti, niso izjave:

1. Zapri vrata!   2. Ta stavek ni resničen.

Nekaj osnovnih izjav:

1. Zunaj sije Sonce.   2. Peter sedi na vrtu.

Nekaj sestavljenih izjav:

1. Če zunaj sije Sonce, Peter sedi na vrtu.

2. Peter sedi na vrtu in zunaj sije Sonce.   3. Ni res, da zunaj sije Sonce.

Izjavni vezniki

- Izjave sestavljamo s pomočjo **izjavnih veznikov** (tudi **izjavnih povezav, logičnih veznikov**), ki jih definiramo s pomočjo **resničnostnih tabel**.
- Nekaj osnovnih izjavnih veznikov:
  - **enomestni**:
    - **negacija** izjave A, $\neg A$, beremo "*Ne A*".
    - $\neg A$ je resnična natanko tedaj, ko je A neresnična:

A	$\neg A$
0	1
1	0

  - **dvomestni**:
    - **konjunkcija** $\wedge$
    - **disjunkcija** $\vee$ in **ekskluzivna disjunkcija** $\underline{\vee}$
    - **implikacija** $\Rightarrow$
    - **ekvivalenca** $\Leftrightarrow$
- Vezniki so lahko tudi **večmestni**.

Osnovni dvomestni vezniki

$A, B \ldots$ izjavi

- $A \wedge B$ beremo kot "*A in B*" in je resnična ntk tedaj, ko sta A in B resnični.
- $A \vee B$ beremo kot "*A ali B*" je resnična ntk tedaj, ko je vsaj ena od izjav A ali B resnična.
- $A \veebar B$ beremo kot "*Ali A ali B*" je resnična ntk tedaj, ko je natanko ena od izjav A ali B resnična.
- $A \Rightarrow B$ beremo kot "*Iz A sledi B*" oz. "*A implicira B*" oz. "*Če A potem B*" je neresnična ntk tedaj, ko je A resnična, B pa ne.
- $A \Leftrightarrow B$ beremo kot "*A natanko tedaj, ko B*" oz. "*A ekvivalentno B*" oz. "*A, če in samo če B*" je resnična ntk tedaj, ko je vsaj ena od izjav A ali B resnična.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1

Dogovor o opuščanju oklepajev

Če ni z oklepaji drugače označeno, potem je prednostni red izjavnih veznikov naslednji:

1. **Negacija** veže **močneje** kot **konjunkcija**, **konjunkcija** veže **močneje** kot **disjunkcija**, **disjunkcija** veže **močneje** kot **implikacija** in **implikacija** veže **močneje** kot **ekvivalenca**.
2. Istovrstni (dvomestni) vezniki vežejo od **leve proti desni**.

$\neg$	$\wedge$	$\vee$ $\veebar$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$

Primer

Nekaj parov enakovrednih izjavnih izrazov:

$$\begin{aligned} \neg p \vee q \wedge r &= (\neg p) \vee (q \wedge r) \\ p \Rightarrow q \wedge r \vee \neg s &= p \Rightarrow ((q \wedge r) \vee (\neg s)) \\ p \Leftrightarrow q \Rightarrow r \wedge \neg s &= p \Leftrightarrow (q \Rightarrow (r \wedge (\neg s))) \end{aligned}$$

Izjavni izrazi

Izjavne izraze definiramo induktivno z naslednjimi pravili:

1. **Izjavni konstanti** 0 in 1, ki jima pravimo tudi **laž** in **resnica**, sta izjavna izraza.
2. **Izjavne spremenljivke** $p, q, r, \ldots$ so izjavni izrazi.
3. Če je A izjavni izraz, potem je tudi $(\neg A)$ izjavni izraz.
4. Če sta A in B izjavna izraza, potem so tudi

$$(A \wedge B)\ , \quad (A \vee B)\ , \quad (A \Rightarrow B) \quad \text{in} \quad (A \Leftrightarrow B)$$

   izjavni izrazi.

Naloga

Premisli: število n-mestnih izjavnih izrazov je 2^{2^n}.

Resničnostna tabela in enakovrednost izrazov

Resničnost izjavnih izrazov najlažje podamo s pomočjo **resničnostne tabele**. Za vsak nabor logičnih vrednosti izjavnih spremenljivk zapišemo logično vrednost izjavnega izraza.

Naloga

Določi resničnostno tabelo izraza $A \wedge \neg B \Rightarrow C$.

Vrste izjavnih izrazov glede na resničnost:

- **Tavtologija** je izjavni izraz, ki je "vedno" resničen.
- **Protislovje** je izjavni izraz, ki je "vedno" neresničen.
- **Nevtralni izjavni izraz** je izjavni izraz, ki ni niti tavtologija niti protislovje.

Izjavna izraza I in J sta **enakovredna**, če imata pri **vseh naborih** vrednosti izjavnih spremenljivk **enako vrednost**. V tem primeru pišemo $I \sim J$.

Naloga

Izjavna izraza I *in* J *sta enakovredna natanko tedaj, ko je izraz* $I \Leftrightarrow J$ *tavtologija.*

Enakovredni izjavni izrazi

Naloga

Za enakovrednost izjavnih izrazov A, B, C *veljajo naslednje zveze:*

1. $A \sim A$
2. *Če* $A \sim B$*, potem* $B \sim A$.
3. *Če* $A \sim B$ *in* $B \sim C$*, potem* $A \sim C$.