Diskretne strukture

Drugi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

15. oktober 2020

Zakoni izjavnega računa

Nekateri pari enakovrednih izjavnih izrazov imajo posebna imena. To so **zakoni izjavnega računa**:

Dvojna negacija	$\neg\neg A \sim A$
Idempotenca	$A \wedge A \sim A$ $A \vee A \sim A$
Komutativnost	$A \wedge B \sim B \wedge A$ $A \vee B \sim B \vee A$ $A \Leftrightarrow B \sim B \Leftrightarrow A$
Asociativnost	$(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \sim A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$
Absorpcija	$\boxed{A \vee (A \wedge B) \sim A}$ $\boxed{A \wedge (A \vee B) \sim A}$

Naloga

Dokaži veljavnost absorpcije.

Zakoni izjavnega računa

Distributivnost

$$\boxed{A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$$
$$\boxed{A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

de Morganova zakona

$$\boxed{\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B}$$
$$\boxed{\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B}$$

Kontrapozicija

$$A \Rightarrow B \sim \neg B \Rightarrow \neg A$$

Tavtologija in protislovje

$$A \Rightarrow A \sim 1$$
$$A \vee \neg A \sim 1$$
$$A \Leftrightarrow A \sim 1$$
$$A \wedge \neg A \sim 0$$

Lastnosti ekvivalence

$$A \Leftrightarrow B \sim (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$
$$A \Leftrightarrow B \sim (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$
$$\neg(A \Leftrightarrow B) \sim \neg A \Leftrightarrow B$$

Naloga

Dokaži distributivnostna zakona in de Morganova zakona.

Naloga

Poišči izjavni izraz A s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Disjunktivna normalna oblika

Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij:

$$p \wedge (\neg q) \wedge r \wedge \ldots \wedge t.$$

Disjunktivna normalna oblika (DNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{DNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{DNO}$
- A_{DNO} je disjunkcija osnovnih konjunkcij.

Recept: A_{DNO} *lahko* zgradimo na naslednji način:

- Za vsako vrstico resničnostne tabele, v kateri ima A vrednost 1, pripravimo osnovno konjunkcijo.
- V njej zapišemo spremenljivke z vrednostjo 1 in zanikamo tiste z vrednostjo 0.

Disjunktivna normalna oblika

Naloga

Zapiši DNO izjavnega izraza A z resničnostno tabelo:

p	q	r	A
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Konjunktivna normalna oblika

Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij:

$$p \vee (\neg q) \vee r \vee \ldots \vee t.$$

Konjunktivna normalna oblika (KNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{KNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{KNO}$
- A_{KNO} je konjunkcija osnovnih disjunkcij.

Recept: A_{KNO} *lahko* zgradimo na naslednji način:

- Za vsako vrstico resničnostne tabele, v kateri ima A vrednost 0, pripravimo osnovno disjunkcijo.
- V njej zapišemo spremenljivke z vrednostjo 0 in zanikamo tiste z vrednostjo 1.

DNO in KNO

Naloga

Zapiši KNO izjavnega izraza A z resničnostno tabelo:

p	q	r	A
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Naloga

Vsak izjavni izraz ima DNO in vsak izjavni izraz ima KNO.

Naloga

Za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Polni nabori izjavnih veznikov

Družina izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ je **poln nabor izjavnih veznikov**, če za vsak izjavni izraz A obstaja **enakovreden izjavni izraz** B, ki vsebuje samo **veznike iz** $\mathcal{N}$.

Kako v praksi pokazati, da je nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ poln?

1. Izberemo znan poln nabor izjavnih veznikov $\mathcal{Z}$.
2. Vsak veznik iz znanega nabora $\mathcal{Z}$ izrazimo samo z uporabo veznikov iz $\mathcal{N}$.

Primer

Nekaj polnih naborov izjavnih veznikov:

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$.
- $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$,$\{\neg, \Rightarrow\}$, $\{0, \Rightarrow\}$.

Nabor $\{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ *ni poln.*