Diskretne strukture

Tretji sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

22. oktober 2020

Kateri sklepi so pravilni?

1.

Predpostavki:	1.	*Če dežuje, je oblačno.*
	2.	*Dežuje.*
Zaključek:	3.	*Oblačno je.*

2.

Predpostavke:	1.	*Ta žival ima krila ali pa ni ptič.*
	2.	*Če je ta žival ptič, potem leže jajca.*
	3.	*Ta žival nima kril.*
Zaključek:	4.	*Torej ta žival ne leže jajc.*

3.

Predpostavke:	1.	*Io je Jupitrov satelit.*
	2.	*Titan je Saturnov satelit.*
Zaključek:	3.	*Zemlja je tretji planet od Sonca.*

Formalizacija

1. *dežuje* ... d
   oblačno je ... o

$$\begin{array}{ll} 1. & d \Rightarrow o \\ 2. & d \\ \hline 3. & o \end{array}$$

2. *ta žival ima krila* ... k
   ta žival je ptič ... p
   ta žival leže jajca ... j

$$\begin{array}{ll} 1. & k \vee \neg p \\ 2. & p \Rightarrow j \\ 3. & \neg k \\ \hline 4. & \neg j \end{array}$$

Pravilen sklep

Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ je **pravilen sklep** s **predpostavkami** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in **zaključkom** B, če je **zaključek** B **resničen** pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so **resnične vse predpostavke**.

Pišemo:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B.$$

Beremo:

Iz predpostavk $A_1, A_2, \ldots, A_n$ logično sledi zaključek B.

Četrti zgled

Predpostavke:	1.	*Šel bom na tekmo, zvečer pa bom naredil domačo nalogo.*
	2.	*Če grem na tekmo in nato še v kino, zvečer ne bom mogel narediti domače naloge.*
Zaključek:	3.	*Ne morem iti v kino.*

Ta sklep je pravilen.

Formalizacija:

grem na tekmo	...	t
grem v kino	...	k
naredim domačo nalogo	...	d

1.	$t \wedge d$
2.	$t \wedge k \Rightarrow \neg d$
3.	$\neg k$

Nepravilen sklep

Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Poiščemo **protiprimer**, tj. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke resnične, zaključek pa ne.

Primer

ta žival ima krila	...	k
ta žival je ptič	...	p
ta žival leže jajca	...	j

$$\begin{array}{ll} 1. & k \vee \neg p \\ 2. & p \Rightarrow j \\ 3. & \neg k \\ \hline 4. & \neg j \end{array}$$

Nepravilen sklep

ta žival ima krila	...	k
ta žival je ptič	...	p
ta žival leže jajca	...	j

$$\begin{array}{ll} 1. & k \vee \neg p \\ 2. & p \Rightarrow j \\ 3. & \neg k \\ \hline 4. & \neg j \end{array}$$

Vstavimo $k \sim 0$, $p \sim 0$ in $j \sim 1$ ter pridelamo:

$$\begin{array}{rcc} k \vee \neg p & \sim & 1 \\ p \Rightarrow j & \sim & 1 \\ \neg k & \sim & 1 \\ \hline \neg j & \sim & 0 \end{array}.$$

Protiprimer je žival, ki

- nima kril,
- ni ptič in
- leže jajca.

Pravilen sklep

Izrek

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

natanko tedaj, ko je izjavni izraz

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$$

tavtologija.

Izrek

- *Če je $B \sim C$, potem $A \models B$ natanko tedaj, ko $A \models C$.*
- *Če z 1 označimo tavtologijo, potem $A \models 1$.*
- *Velja $A_1, A_2, \ldots, A_n \models A_k$ (za $k \in \{1, \ldots, n\}$).*
- *Če z 1 označimo tavtologijo, potem $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ natanko tedaj, ko $A_1, A_2, \ldots, A_n, 1 \models B$.*

Pravila sklepanja

$A, A \Rightarrow B \models B$	**modus ponens (MP)**
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	**modus tollens (MT)**
$A \vee B, \neg B \models A$	**disjunktivni silogizem (DS)**
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	**hipotetični silogizem (HS)**
$A, B \models A \wedge B$	**združitev (Zd)**
$A \wedge B \models A$	**poenostavitev (Po)**
$A \models A \vee B$	**pridružitev (Pr)**

Pravilom sklepanja pravimo tudi **osnovni pravilni sklepi**.

Dokaz pravilnosti sklepa

Pravilnost sklepa

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

pokažemo tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov

$$C_1, C_2, \ldots, C_m,$$

kjer je

$$C_m = B$$

in za $i = 1, 2, \ldots, m$ velja:

(a) C_i je ena od **predpostavk** ali

(b) C_i je **tavtologija** ali

(c) C_i je **enakovreden** enemu od predhodnih izrazov v zaporedju ali

(d) C_i **logično sledi** iz predhodnih izrazov po enem od osnovnih pravilnih sklepov.

Zgled

Ali iz predpostavk $p \Rightarrow q, p \vee r, q \Rightarrow s, r \Rightarrow t, \neg s$ sledi t?

1.	$p \Rightarrow q$	predpostavka
2.	$p \vee r$	predpostavka
3.	$q \Rightarrow s$	predpostavka
4.	$r \Rightarrow t$	predpostavka
5.	$\neg s$	predpostavka
6.	$p \Rightarrow s$	HS(1,3)
7.	$\neg p$	MT(6,5)
8.	r	DS(2,7)
9.	t	MP(4,8)

Zgledi

Primer

1. *Ali iz predpostavk*

   1. *Če sije sonce, nosim sončna očala.*
   2. *Nosim kapo ali sončna očala.*
   3. *Sončnih očal ne nosim.*

   sledi zaključek

   Nosim kapo in sonce ne sije.

2. *Ali iz predpostavk* $p, \neg p$ *sledi* q*?*

3. *Pokaži, da iz predpostavk* $p \Rightarrow q \vee r$ *in* $\neg r$ *logično sledi zaključek* $p \Rightarrow q$.

Pomožni sklep - pogojni sklep

Pogojni sklep (PS) uporabljamo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije.

Izrek

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \ \models \ B \Rightarrow C$$

natanko tedaj, ko

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B \ \models \ C.$$

Primer

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ *in* $\neg r$ *logično sledi zaključek* $p \Rightarrow q$.

Zgled uporabe pogojnega sklepa

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$\neg r$	predpostavka
3.1.	$\quad p$	predpostavka PS
3.2.	$\quad q \vee r$	MP(1,3.1)
3.3.	$\quad q$	DS(3.2,2)
3.	$p \Rightarrow q$	PS(3.1,3.3)

Zgled napačne uporabe pogojnega sklepa

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek q.

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$\neg r$	predpostavka
3.1.	$\quad p$	predpostavka PS
3.2.	$\quad q \vee r$	MP(1,3.1)
3.3.	$\quad q$	DS(3.2,2)
3.	$p \Rightarrow q$	PS(3.1,3.3)
4.	q	DS(2,3.2)

Sklep je napačen, saj je nabor vrednosti $p \sim q \sim r \sim 0$ protiprimer.
Po zaključku pogojnega sklepa, ne smemo uporabljati zamaknjenih vrstic.

Pomožni skelp - sklep s protislovjem

Sklep s protislovjem (RA) lahko uporabljamo kadarkoli.

Izrek

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$$

natanko tedaj, ko

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B \models 0.$$

Primer

Pokaži, da iz $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$, $s \wedge q \Rightarrow r$ *in* s *sledi* $\neg p$.

Zgled uporabe sklepa s protislovjem

Pokaži, da iz $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$, $s \wedge q \Rightarrow r$ in s sledi $\neg p$.

1.	$p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$	predpostavka
2.	$s \wedge q \Rightarrow r$	predpostavka
3.	s	predpostavka
4.1.	$\neg\neg p$	predpostavka RA
4.2.	p	$\sim$4.1
4.3.	$\neg(q \Rightarrow r)$	MP(1,4.2)
4.4.	$q \wedge \neg r$	$\sim$4.3
4.5.	q	Po(4.4)
4.6.	$\neg r$	Po(4.4)
4.7.	$s \wedge q$	Zd(3,4.5)
4.8.	r	MP(2,4.7)
4.9.	$r \wedge \neg r \sim 0$	Zd(4.8,4.6)
4.	$\neg p$	RA(4.1,4.9)

Analizo primerov (AP) lahko uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Izrek

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \vee B_2 \models C$$

natanko tedaj, ko

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \models C$$

in

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_2 \models C.$$