Poglavje 3

Sistemi nelinearnih enačb

Tretji sklop izročkov

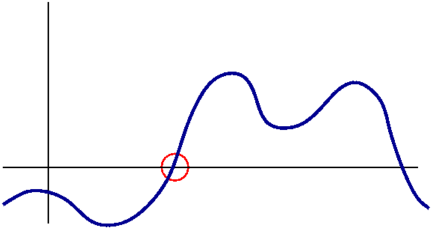
Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

27. oktober 2020

Motivacija

- Vsi problemi niso teoretični niso tako enostavno rešljivi kot sistemi linearnih enačb.
- Ničel polinoma stopnje 5 ne moremo zapisati analitično.
- Kako reševati take probleme? S ponavljanjem določenega postopka (iteracijo) upamo, da se rešitvam čim bolj približamo.

Naj bo dana funkcija $f(x)$. Poišči x, ki zadošča $f(x) = 0$

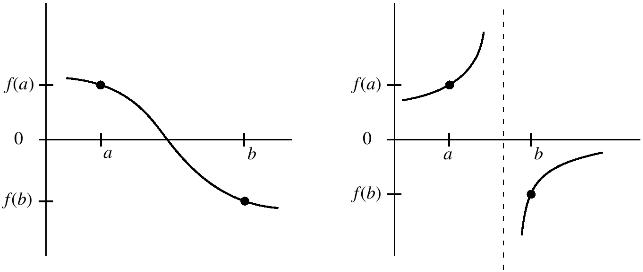


Osnovna strategija reševanja:

1. Skiciraj funkcijo.
   - Postavimo začetno domnevo, kaj je lahko ničla.
   - Določimo, kje bo težko najti ničle.
2. Začnemo z začetno domenovo in uporabimo nek iteriracijski algoritem

Omejitev intervala za iskanje ničle

- Ničla x je <u>omejena</u> na $[a, b]$, če imata $f(a)$ in $f(b)$ različna predznaka.
- Sprememba predznaka funkcije ne pomeni, da je na tem intervalu ničle, kajti lahko imamo na intervalu singularnost:



- Interval, kjer funkcija spremeni predznak, pa nam lahko vseeno služi kot začetna domneva.

Iskanje ničle

Recimo, da smo določili interval, kjer naj bi ležala ničla.

Sedaj jo moramo poiskati.

Metode:

- bisekcija
- Newtonova oz. tangentna metoda
- sekantna metoda
- metoda regula falsi
- metode fiksne točke.

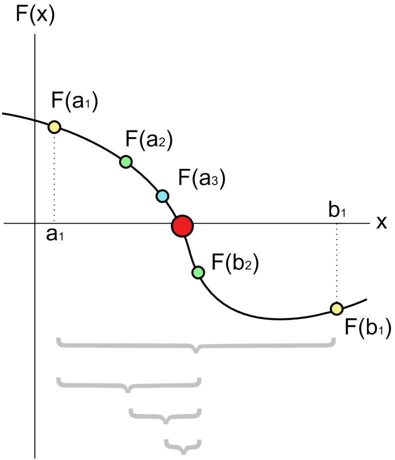
Bisekcija

Razpolovišče začetnega intervala $[a, b]$ je točka

$$x_m = \frac{1}{2}(a + b).$$

Postopek:

1. Poišči razpolovišče.
2. Izmed dveh možnih intervalov izberi tistega, kjer ima funkcija različno predznačeni krajišči.
3. Nadaljujemo s prvim korakom.
4. Ustavimo se, ko je interval krajši od naprej predpisane tolerance.



Bisekcija

```
zacetni podatki:  f, a, b, tol
for k = 1, 2, ...
  x_m = a + (b - a)/2
  if sign(f(x_m)) = sign(f(a))
    a = x_m
  else
    b = x_m
  end
  if |b-a|<tol, stop
end
```

Naj bo δ_n velikost intervala po n-tem koraku bisekcije. Potem velja

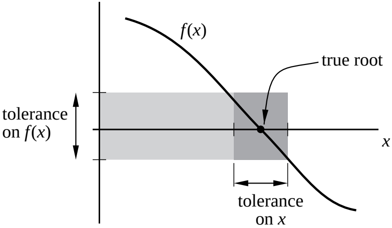
$$\delta_0 = b - a, \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\delta_0, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\delta_1 = \frac{1}{4}\delta_0, \quad \ldots, \quad \delta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta_0$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\delta_n}{\delta_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-n} \qquad \text{ali} \qquad n = \log_2\left(\frac{\delta_n}{\delta_0}\right)$$

n	$\frac{\delta_n}{\delta_0}$	število izračunov funkcijskih vrednosti
5	3.1×10^{-2}	7
10	9.8×10^{-4}	12
20	9.5×10^{-7}	22
30	9.3×10^{-10}	32
40	9.1×10^{-13}	42
50	8.9×10^{-16}	52

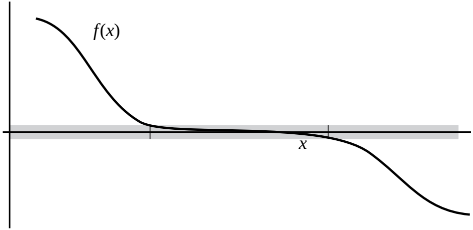
Konvergenčni kriteriji za x

Zaustavitveni kriterij je odvisen od narave problema, ki ga rešujemo:

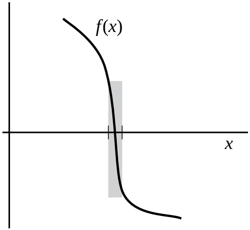
- Lahko nas zanima razdalja, kdaj velja
$$|x_k - x_{k-1}| < \delta_x.$$
- Lahko pa nas zanima, kdaj velja
$$|f(x_k)| < \delta_f.$$
- 

Primerjava obeh konvergenčnih kriterijev

Če je $f'(x)$ majhen v okolici ničle, je lažje zadostiti toleranci na funkcijsko vrednost.



Če je $f'(x)$ velik v bližini ničle, je možno zadostiti toleranci na dolžino intervala, četudi je $|f(x)|$ še vedno velik.



Povezava med obema kriterijama

- Kako sta kriterija na x in $f(x)$ povezana med sabo?
- Ko x_a in x_b konvergirata proti x^*, gre razmerje

$$\frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}$$

  proti $f'(x^*)$.
- Zato lahko pričakujemo, da velja

$$|f(x_b) - f(x_a)| \approx |f'(x^*)||x_b - x_a|,$$

  ko x_a in x_b konvergirata proti x^*.

Hitrost konvergence

- Naj bo $e_n = x^* - x_n$ napaka.
- V splošnem pravimo, da zaporedje **konvergira z redom** r, če je

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^r} = C$$

Posebni primeri:

- Če je $r = 1$ in $C = 1$, potem je red **sublinearen**.
- Če je $r = 1$ in $C < 1$, potem je red **linearen**.
- Če je $1 < r < 2$, potem je red **superlinearen**.
- Če je $r = 2$ in $C > 0$, potem je red **kvadratičen**.
- Če je $r = 3$ in $C > 0$, potem je red **kubičen**.

Linearen red konvergence na vsakem koraku doda **eno točno** mesto.

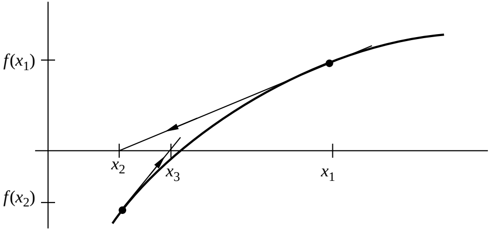
Kvadratičen red konvergence na vsakem koraku **podvoji število točnih** mest.

Newtonova oz. tangentna metoda

Iteracija:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.}$$

Izpeljava:



Pri trenutnem približku x_k uporabimo funkcijsko vrednost $f(x_k)$ in odvod $f'(x_k)$, da izračunamo naslednji približek. Enačba tangente na krivuljo v točki $(x_k, f(x_k))$ je

$$y = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)\, f'(x_k).$$

Ker je cilj najti x, tako da je $f(x) = 0$,

$$0 = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)\, f'(x_k)$$

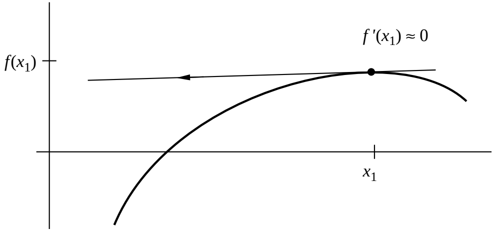
in izrazimo x_{k+1}.

Newtonova oz. tangentna metoda

```
zacetni podatki:  x_1
for k = 2,3,...
  x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})
  if x_k znotraj tolerance, stop
end
```

Lastnosti tangentne metode:

- Konvergira precej hitreje kot bisekcija - red konvergence je vsaj 2 (izpeljava sledi).
- Zahteva analitično formulo za $f'(x)$ - če tega ne poznamo, lahko uporabimo sekantno metodo (sledi).
- Je enostavna, če je $f'(x)$ moč izračunati.
- Ni nujno, da približki ostanejo znotraj začetnega intervala:



Ker je

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

Hitrost konvergence Newtonove metode

Spomnimo se

Metoda ima hitrost konvergence reda r, če obstaja konstanta $C > 0$, tako da je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = C$$

Newotonova metoda ima hitrost konvergence reda 2 (kvadratična konvergenca) vedno, ko velja $f'(x_*) \neq 0$. Za ξ med x_k in x_* velja (sledi iz lastnosti Taylorjeve vrste)

$$f(x_*) = f(x_k) + (x_* - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(x_* - x_k)^2 f''(\xi) = 0.$$

Torej je

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + x_* - x_k + (x_* - x_k)^2 \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} = 0.$$

Sledi

$$x_* - x_{k+1} + (x_* - x_k)^2 \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} = 0.$$

Zato

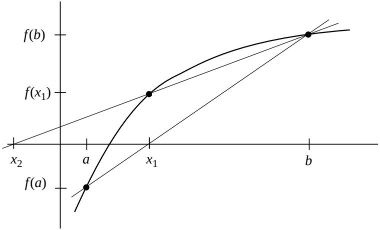
$$\frac{|x_* - x_{k+1}|}{|x_* - x_k|^2} = \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}.$$

Sekantna metoda

Iteracija:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)\left[\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\right]}$$

Izpeljava:



S pomočjo dveh zaporednih približkov x_{k-1} in x_k, za nov približek vzamemo x-koordinato presečišča sekatne skozi točki $(x_k, f(x_k))$ in $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ z abscisno osjo.
Naj bosta dana

$$x_k = \text{trenutni približek za ničlo}, \quad x_{k-1} = \text{prejšnji približek za ničlo.}$$

Aproksimiramo prvi odvod z naklonom sekante skozi točki $(x_k, f(x_k))$ in $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Vstavimo to aproksimacijo v tangentno metodo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

in dobimo

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\left[\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\right]$$

Sekantna metoda

Dve (analitično) ekvivalentni verziji te formuli sta

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\left[\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\right] \tag{$\star$}$$

in

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k)x_{k-1} - f(x_{k-1})x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{$\star\star$}$$

Enačba ($\star$) je numerično stabilnejša, saj je oblike $x_{k+1} = x_k + \Delta$ in tudi ob netočnem Δ, ta ob konvergenci ne bo velik (saj bo $f(x_k)$ majhna vrednost).

Enačba ($\star\star$) je bolj občutljiva, saj se lahko zgodi 'katastrofalno odštevanje':

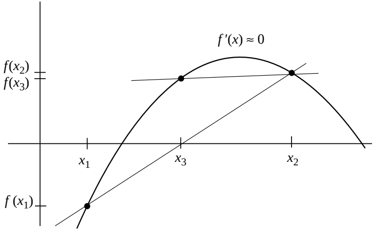
- V primeru konvergence velja $f(x_k) \to f(x_{k-1})$, tako da je imenovalec lahko zelo velik.
- V primeru konvergence velja $|f(x)| \to 0$, zato lahko pride do podkoračitve.

Sekantna metoda - algoritem

```
zacetni podatki:  x_1 = ..., x_2 = ...
for k = 2,3...
  x_{k+1} = x_k - f(x_k)(x_k - x_{k-1})/(f(x_k) - f(x_{k-1}))
  if je izpolnjen tolerancni pogoj, stop
end
```

Lastnosti sekantne metode:

- Konvergenca je podobna tisti pri tangentni metodi, tj. $r \approx 1.62$ (izpeljavo izpustimo).
- Ni potrebno računati odvoda $f'(x)$.
- Algoritem je enostaven.
- Potrebujemo dva zaporedna približka.
- Naslednji približek ne ostane nujno znotraj začetnega intervala:

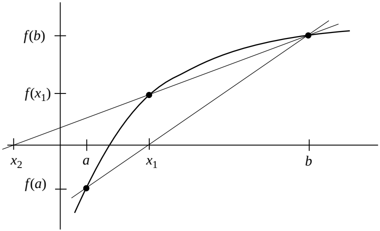


Velja

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\left[\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\right],$$

torej bo nov približek x_{k+1} daleč vstran od prejšnjega, če bo $f(x_k) \approx f(x_{k-1})$ in bo vrednost $|f(x)|$ majhna.

Metoda regula falsi



Metoda regula falsi je hibrid bisekcije in sekantne metode. Na vsakem koraku namreč izračunamo s pomočjo dveh zaporednih približkov a in b nov približek kot x-koordinato presečišča sekatne skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$ z abscisno osjo, potem pa za nova približka a, b vzamemo interval, kjer je funkcija različno predznačena.

```
zacetni podatki:  a, b
for k = 2, 3 ...
  c = b − f(b)(b − a)/(f(b) − f(a))
  if f(a)f(c) < 0
      b = c
  else
      a = c
  if je izpolnjen tolerancni pogoj, stop
end
```

Lastnosti metode regula falsi:

- Konvergenca je počasnejša kot pri sekantni.
- Naslednji približek nujno ostane znotraj začetnega intervala.

Metode fiksne točke

Metodo fiksne točke dobimo tako, da enačbo

$$f(x) = 0$$

preoblikujemo v ekvivalentno enačbo

$$g(x) = x.$$

Točki x pravimo **negibna točka** funkcije g.

Tangentna metoda je poseben primer metode fiksne točke.

Izrek

Naj bo g zvezno odvedljiva na intervalu $I = [a, b]$ in naj velja $g(I) \subseteq I$. Naj bo še $\sup_{x \in I} |g'(x)| = m < 1$. Velja:

- *$g(x) = x$ ima enolično rešitev ξ na I.*
- *Za vsak $x_0 \in I$ zaporedje $x_n = g(x_{n-1})$ konvergira proti ξ, pri čemer je*

$$|x_{n+1} - \xi| \leqslant \min\left\{m^{n+1}|x_0 - \xi|, \frac{m}{1-m}|x_{n+1} - x_n|, \frac{m^{n+1}}{1-m}|x_1 - x_0|\right\}.$$

Metoda fiksne točke - dokaz konvergenčnega izreka

Velja:

$$|x_n - \xi| = |g(x_{n-1}) - g(\xi)| \underbrace{=}_{\zeta \in (\xi, x_{n-1})} |g'(\zeta)||x_{n-1} - \xi| \leqslant m|x_{n-1} - \xi|.$$

Nadaljujemo in dobimo:

$$|x_n - \xi| \leqslant m^n |x_0 - \xi|.$$

Torej zaporedje $\{x_n\}_n$ res konvergira za poljuben začetni približek x_0.

Velja

$$|x_{n+k+1} - x_{n+k}| = |g(x_{n+k}) - g(x_{n+k-1})| \leqslant m|x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leqslant \ldots \leqslant m^k |x_{n+1} - x_n|.$$

Torej je

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \xi| &\leqslant |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+3} - x_{n+2}| + \ldots \leqslant (m + m^2 + \ldots)|x_{n+1} - x_n| \\ &= \frac{m}{1-m}|x_{n+1} - x_n| = \frac{m^{n+1}}{1-m}|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Metoda fiksne točke - red konvergence

Izrek

Naj bo iteracijska funkcija g v okolici negibne točke ξ p-krat zvezno odvedljiva in velja

$$g'(\xi) = g''(\xi) = \cdots = g^{(p-1)}(\xi) = 0$$

in $g^{(p)}(\xi) \neq 0$. Potem je red konvergence zaporedja $x_{n+1} = g(x_n)$ enak p.

Dokaz.

Razvijemo $g(x)$ v Taylorjevo vrsto okoli točke ξ:

$$x_{n+1} = g(x_n) = \xi + \frac{1}{p!} g^{(p)}(\xi)(x_{n+1} - \xi)^p.$$

Odtod sledi

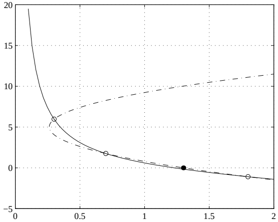
$$\frac{|x_{n+1} - \xi|}{|x_n - \xi|^p} = \frac{1}{p!} |g^{(p)}(\zeta)|,$$

kjer je ζ na majhnem intervalu okoli ξ. $\square$

`fzero` funkcija

`fzero` je hibridna metoda v Matlabu, ki vključuje bisekcijo, sekantno metodo in obratno kvadratno interpolacijo.

Pri obratni kvadratni interpolaciji se išče presečišče parabole skozi tri točke $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, z x-osjo.




```
r = fzero('fun',x0)
```

`fzero` izbere za naslednji približek

1. Rezultat obratne kvadratne interpolacije, če je le-ta znotraj začetnega intervala.
2. Rezultat sekantne metode, če prvi korak ni izpolnjen.
3. Rezultat bisekcije, če tudi drugi korak ni izpolnjen.