Diskretne strukture

Četrti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

5. november 2020

Pogojni sklep (PS) uporabljamo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije.

Izrek

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B \Rightarrow C$$

natanko tedaj, ko

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B \models C.$$

Primer

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ *in* $\neg r$ *logično sledi zaključek* $p \Rightarrow q$.

Zgled uporabe pogojnega sklepa

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$\neg r$	predpostavka
3.1.	p	predpostavka PS
3.2.	$q \vee r$	MP(1,3.1)
3.3.	q	DS(3.2,2)
3.	$p \Rightarrow q$	PS(3.1,3.3)

Zgled napačne uporabe pogojnega sklepa

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek q.

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$\neg r$	predpostavka
3.1.	$\quad p$	predpostavka PS
3.2.	$\quad q \vee r$	MP(1,3.1)
3.3.	$\quad q$	DS(3.2,2)
3.	$p \Rightarrow q$	PS(3.1,3.3)
4.	q	DS(2,3.2)

Sklep je napačen, saj je nabor vrednosti $p \sim q \sim r \sim 0$ protiprimer.
Po zaključku pogojnega sklepa, ne smemo uporabljati zamaknjenih vrstic.

Analizo primerov (AP) lahko uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Izrek

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \vee B_2 \models C$$

natanko tedaj, ko

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \models C$$

in

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_2 \models C.$$

Zakaj predikatni račun?

Izjavni račun se ukvarja s **trditvami** in **povezavo med njimi**. Ali iz povezanosti trditve, ki je zapisana v predpostavkah, sledi povezanost trditev, ki je zapisana v sklepu?

Predikatni račun pa se bo ukvarjal z **elementi neke množice**, njihovimi **lastnostmi** in **povezave med njimi**.

V predikatnem računu moramo izbrati **področje pogovora**, tj. množico, iz katere izbiramo elemente, o katerih govori predikatni račun.Poleg logičnih veznikov sta dovoljena še **kvantifikatorja** $\forall$, $\exists$. Predikatni račun vsebuje kot poseben primer izjavni račun.

Zakaj predikatni račun?

Spodnjega sklepanja ne moremo narediti v izjavnem računu.

Predpostavki:	*Vsi študentje računalništva morajo opraviti predmet diskretne strukture.*
	Jaka je študent računalništva.
Zaključek:	*Jaka mora opraviti predmet diskretne strukture.*

V izjavnem računu bi lahko naredili naslednje sklepanje:

Predpostavki:	*Če je Jaka študent računalništva, potem mora opraviti predmet diskretne strukture.*
	Jaka je študent računalništva.
Zaključek:	*Jaka mora opraviti predmet diskretne strukture.*

Toda zgornji sklepanji nimata istega pomena.

Področje pogovora in predikati

Področje pogovora je neprazna **množica**. Na primer ljudje, številke, živali.

Predikati so logične **funkcije**, ki za svoje argumente uporabijo elemente področja pogovora.

Če v predikate vstavljamo elemente področja pogovora, dobimo izjave.

Primer

Področje pogovora: $\mathbb{Z}$.

Predikat: $P(x, y) =$ "$x > y$".

$P(4, 3)$ *pomeni* "$4 > 3$". *Torej ima* $P(4, 3)$ *logično vrednost 1.*

$P(3, 4)$ *pomeni* "$3 > 4$". *Torej ima* $P(3, 4)$ *logično vrednost 0.*

Ne velja $P(x, y) = P(y, x)$.

Predikati

Predikate ločimo po **mestnosti**.

V izbrani interpretaciji enomestni predikati ustrezajo **lastnostim** elementov področja pogovora.

Primer

Področje pogovora: $\mathbb{Z}$.

Predikat: $P(x) =$ “x^2 *je pozitivno število*“.

Dvomestni predikati ustrezajo **zvezam** (tudi **relacijam**) med elementi področja pogovora.

Primer

Področje pogovora: $\mathbb{Z}$.

Predikat: $P(x, y) =$ “$x > y$“.

Kvantifikatorja

Radi bi izrazili trditve oblike:

- **Nekateri** ptiči ne letijo.
- Kvadrat **poljubnega** realnega števila je nenegativno število.
- Na spletu **nihče** ne pozna tvoje identitete.

V ta namen potrebujemo **dva kvantifikatorja**:

$\forall$	**univerzalni kvantifikator**	"Za vsak"
$\exists$	**eksistenčni kvantifikator**	"Obstaja"

Primer

Nekateri *ptiči ne letijo.*

Področje pogovora $\mathcal{D} \ldots$ *množica ptičev.*

Predikat $\ldots \exists x \in \mathcal{D}$: "x *ne leti.*"

Kvantifikatorja

Primer

Kvadrat **poljubnega** *realnega števila je nenegativno število.*

Področje pogovora $\mathcal{D} \ldots$ *množica* $\mathbb{R}$.

Predikat $\ldots \forall x \in \mathbb{R}$: "$x^2 \geq 0.$"

Primer

Na spletu **nihče** *ne pozna tvoje identitete.*

Področje pogovora $\mathcal{D} \ldots$ *množica vseh uporabnikov spleta.*

Predikat $\ldots \neg(\exists x \in \mathcal{D}$: "x *pozna tvojo identiteto.*")

Pomen kvantifikatorjev

Naj bo $\mathcal{D}$ področje pogovora.

$\forall x \in \mathcal{D},\ P(x)$ je izjava, ki je resnična natanko takrat, ko imajo vsi elementi iz $\mathcal{D}$ lastnost P. Sicer je neresnična.

$\exists x \in \mathcal{D},\ P(x)$ je izjava, ki je resnična natanko takrat, ko obstaja element iz $\mathcal{D}$, ki ima lastnost P. Sicer je neresnična.

Primer

Naj bo $\mathcal{D} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ končna množica. Potem je

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathcal{D},\ P(x)) &\equiv (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)),\\ (\exists x \in \mathcal{D},\ P(x)) &\equiv (P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)).\end{aligned}$$

Primer

Definiraj ustrezne predikate in zapiši naslednje izjave:

- *Nekateri ljudje so nepošteni.*
- *Noben človek ni nepošten.*
- *Vsi ljudje so nepošteni.*

Jezik predikatnega računa

Naj bo $\mathcal{D}$ področje pogovora. V jeziku predikatnega računa uporabljamo:

- **spremenljivke** $x, y, z, \ldots$ iz $\mathcal{D}$,
- **konstante** $a, b, c, \ldots$ iz $\mathcal{D}$,
- **predikate** $P, Q, R, \ldots$,
- izjavne veznike $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$,
- **kvantifikatorja** $\forall$ in $\exists$ ter
- oklepaja (in) .

Spremenljivkam in konstantam pravimo tudi **termi**.

Atomi predikatnega računa so, na primer,

$$P(x), P(a), Q(x, y), Q(a, x), \ldots$$

Atome dobimo tako, da terme vstavimo v predikate.

Izjavne formule so definirane induktivno:

1. Atomi so izjavne formule.
2. Če sta W in V izjavni formuli in je x spremenljivka, potem so tudi

$$(\neg W), (W \wedge V), (W \vee V), (W \Rightarrow V), (W \Leftrightarrow V), \ldots$$

$$(\exists x\, W) \quad \text{in} \quad (\forall x\, W)$$

izjavne formule.

Doseg kvantifikatorjev; vezane in proste spremenljivke

Doseg kvantifikatorja je **najmanjši možen**: najmanjša izjavna formula, ki jo preberemo desno od kvantifikatorja (skupaj z njegovo spremenljivko).

V formuli imamo vezane in proste spremenljivke:

- vstop spremenljivke x je **vezan**, če se ta x nahaja v dosegu (območju delovanja) kvantifikatorja $\forall x$ ali $\exists x$,
- vstop spremenljivke, ki ni vezan, je **prost**.

Kvantifikator **veže** svojo spremenljivko in proste spremenljivke z istim imenom v svojem dosegu.

Kvantifikatorji imajo **"isto prednost"** kot negacija.

Primer

Določi doseg kvantifikatorjev in odloči, katere spremenljivke so vezane in katere proste:

1. $\forall x\, P(x, y) \wedge Q(x, y)$,
2. $\forall x\, P(w, y) \wedge Q(x, y)$,
3. $\forall x\, (P(x, y) \wedge Q(z, y))$,
4. $\forall x \neg \exists y \forall z\, P(x, y, z)$,
5. $\exists x\, \neg P(x, y) \Rightarrow Q(x) \wedge R(y)$,
6. $\exists x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x) \vee P(x) \wedge R(x) \vee S(y)$.