1. NALOGE IZ LINEARNI SISTEMI

(1) (a) Za vsak $m \in \{5, 10, 15, \ldots, 10^3\}$ generiraj 5 naključnih matrik velikosti $m \times m$ z elementi iz enakomerne zvezne porazdelitve na intervalu $[-1, 1]$ in za vsako izračunaj pivotno rast ρ pri LU razcepu z delnim pivotiranjem. Rezultate prikaži z diagramom kot na [TB97, p. 168, Figure 22.1].
(b) Za vsak $m = 8, 16, 32$ izračunaj pivotne rasti 10^6 naključnih matrik iz enakomerne zvezne porazdelitve na intervalu $[-1, 1]$ in rezultate predstavi s frakvenčnim diagramom kot [TB97, p. 168, Figure 22.2].
(c) Primerjaj svoje rezulate z rezultati za naključne matrike iz normalne porazdelitve [TB97, p. 168].

(2) (a) Za naključno matriko velikosti 128×128 z elementi iz enakomerne zvezne porazdelitve na intervalu $[-1, 1]$ izračunaj LU razcep z delnim pivotiranjem. Z diagramom kot na [TB97, Figure 22.3, p. 170]. predstavi vse tiste elemente (i, j) matrike L_{ij}^{-1}, ki imajo absolutne vrednosti večje od 1 in izračunaj vhod z maksimalno absolutno vrednostjo matrike L^{-1}.
(b) Generiraj naključno spodnje trikotno matriko L velikosti 128×128 z elementi iz enakomerne zvezne porazdelitve na intervalu $[-1, 1]$ in 1 na diagonali. Z diagramom kot v [TB97, Figure 22.3, p. 170] predstavi vse tiste elemente (i, j) matrike L_{ij}^{-1}, ki imajo absolutne vrednosti večje od 1 in izračunaj vhod z maksimalno absolutno vrednostjo matrike L^{-1}.

(3) (a) Naj bo A_n matrika velikosti n

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poišči eksplicitni inverz matrike A_n. (Poskusi za majhne n, nato pa predpis ugani.)
(b) Izračunaj $\kappa(A_n)$.
(c) Naj bo $b_n = \begin{bmatrix} -n+2, -n+3, \ldots, -1, 0, 1 \end{bmatrix}$. Rešitev sistema $A_n x = b$ je $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^T$. Perturbiraj b do $\hat{b} = b + \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \epsilon \end{bmatrix}^T$ in reši sistem $A_n \hat{x} = \hat{b}$. Uporabi $\hat{x} = x + A_n^{-1}(\hat{b} - b)$. Preveri, da b, $\hat{b}$, x, $\hat{x}$ zadoščajo neenakosti

$$\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|b - \hat{b}\|}{\|b\|}.$$

(4) (a) Primer slabo pogojenih matrik so Hilbertove matrike:

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Za $n = 4, 5, \dots, 20$ izračunaj in na grafu prikaži pogojenostna števila Hilbertovih matrik.

(b) Poišči in predstavi primer uporabe Hilbertove matrike v aplikacijah. (Npr. [BDB16, Section 4.7].

(5) Naj bo A_n kot v nalogi (3) zgoraj. Naj bo

$$b_n = \frac{1}{(n+1)}^2 \left[\begin{array}{ccc} 1 & \dots & 1 \end{array} \right]^T.$$

Uporabi Jacobijevo in Gauss-Seidlovo metodo za reševanje sistema $A_n x = b_n$ z začetnim približkov $x^{(0)} = 0$. Zaustavitveni kriterij naj bo $\|x^{(k)} - x^{(k+1)}\| \leq \epsilon$.

(a) Poskusi z $n = 10, 100, 1000$ in $\epsilon = 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}$. Za vsak primer si zapiši k, kjer se iteracija konča. Komentiraj obnašanje obeh metod na tem primeru.

(b) Pokaži, da je točna rešitev sistema $Ax_n = b_n$ enaka

$$x_n = \left[\begin{array}{cccc} \frac{t_1(1-t_1)}{2} & \frac{t_2(1-t_2)}{2} & \dots & \frac{t_n(1-t_n)}{2} \end{array} \right]^T,$$

kjer je $t_i = \frac{i}{n+1}$, $1 \leq i \leq n$.

(c) Izračunaj normo napak $\|x_n - x^{(i)}\|$ med iteracijo in rezultate prikaži na grafu.

(6) Gauss-Seidlovo iteracijo za reševanje linearnih sistemov $Ax = b$ se da pospešiti z uporabo t.i. *SOR metod*. Korak iteracije je oblike

$$x^{(k)} = T_w x^{(k-1)} + c_w,$$

kjer je

$$T_w = (D + wL)^{-1}[(1-w)D - wU] \quad \text{in} \quad c_w = w(D + wL)^{-1}b,$$

L strogi spodnji trikotnik matrike A, D diagonala matrike A in U strogi zgornji trikotnik matrike A.

(a) Reši sistem $Ax = b$ podan z

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \left[\begin{array}{ccc} 24 & 10 & 5 \end{array} \right]^T,$$

z Gauss-Seidlovo iteracijo in SOR metodo pri $w = 0.1, 0.2, \ldots, 1.9$ ter $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Nariši graf hitrosti konvergence (tj. na y-osi naj bo število korakov do zaustavitve) v odvisnosti od parametra w.

(7) Gauss-Seidlovo iteracijo za reševanje linearnih sistemov $Ax = b$ se da pospešiti z uporabo t.i. *SSOR metod*. Korak iteracije je sestavljen iz dve korakov oblike

$$x^{(k-1/2)} = T_w x^{(k-1)} + c_w,$$
$$x^{(k)} = U_w x^{(k-1/2)} + d_w$$

kjer so

$$T_w = (D + wL)^{-1}[(1-w)D - wU] \quad \text{in} \quad c_w = w(D + wL)^{-1}b,$$
$$U_w = (D + wU)^{-1}[(1-w)D - wL] \quad \text{in} \quad d_w = w(D + wU)^{-1}b,$$

L strogi spodnji trikotnik matrike A, D diagonala matrike A in U strogi zgornji trikotnik matrike A.

(a) Reši sistem $Ax = b$ podan z

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 24 & 10 & 5 \end{bmatrix}^T,$$

z Gauss-Seidlovo iteracijo in SSOR metodo pri $w = 0.1, 0.2, \ldots, 1.9$ ter $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Nariši graf hitrosti konvergence (tj. na y-osi naj bo število korakov do zaustavitve) v odvisnosti od parametra w.

(8) Ena od iterativnih metod za reševanje sistema $Ax = b$ je tudi metoda kojungiranih gradientov z naslednjim algortimom:

$x_0 = 0, r_0 = b, p_0 = r$
for $n = 1, 2, 3, \ldots$ **do**
  $\alpha_n = \frac{r_{n-1}^T r_{n-1}}{p_{n-1}^T A p_{n-1}}$
  $x_n = x_{n-1} + \alpha_n p_{n-1}$
  $r_n = r_{n-1} - \alpha_n A p_{n-1}$
  $\beta_n = \frac{r_n^T r_n}{r_{n-1}^T r_{n-1}}$
  $p_n = r_n + \beta_n p_{n-1}$
end for

Konvergenca metode konjugiranih gradientov je odvisna od razporeditve lastnih vrednosti matrike A. Da dosežemo bolj ugodno razporeditev s stališča konvergence lahko namesto sistema $Ax = b$ rešujemo sistem $M^{-1}Ax = M^{-1}b$, kjer je M simetrična pozitivno definitna matrika. Dobimo naslednji algoritem:

$x_0 = 0, r_0 = b - Ax_0, p_0 = M^{-1}r_0$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$ **do**
$\alpha_n = \frac{r_{n-1}^T M r_{n-1}}{p_{n-1}^T A p_{n-1}}$
$x_n = x_{n-1} + \alpha_n p_{n-1}$
$r_n = r_{n-1} - \alpha_n A p_{n-1}$
$\beta_n = \frac{r_n^T M^{-1} r_n}{r_{n-1}^T M^{-1} r_{n-1}}$
$p_n = M^{-1} r_n + \beta_n p_{n-1}$
end for

Dana je matrika A velikosti $m \times m$ oblike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 8 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2(m-1)^2 & -1 \\ & & & -1 & 2m^2 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $b = Ae$, kjer je e vektor samih enic. Uporabi osnovno metodo kojugiranih gradientov in metodo z $M = \mathrm{diag}(1, 4, \ldots, m^2)$ in nariši grafe ostankov r_k za $k = 1, \ldots, 100$ za matrike z $m = 10, 100, 500$.

(9) Naj bodo $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstanti in A matrika velikosti $n \times n$, ki ima na diagonali števila $2c$, na prvi naddiagonali in prvi poddiagonali števila a, na tretji nad in poddiagonali pa števila b.
  (a) Za $b = a = -1$, $c = 2$ in $n = 10, 100, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ z uporabe metode konjugiranih gradientov predstavljene v prejšnji nalogi izračunaj število korakov z začetnim približkom x_0, ki je vektor samih ničel, do pogoja konvergence z zaustavitvenim pogojem $\frac{\|r_k\|}{\|r_0\|} \leq 10^{-10}$.
  (b) Ponovi nalogo za $a = b = \frac{1}{9}$ in $c = \frac{5}{18}$.

LITERATURA

[Ore97] B. Orel: Osnove numerične matematike, Založba FE in FRI, Ljubljana, 1997.
[KC02] D.R. Kincaid, E.W. Cheney: Numerical Analysis, Mathematics of Scientific Computing, 3rd edition, Brooks/Cole, Pacific Grove, 2002.
[AH03] K. Atkinson, W. Han: Elementary Numerical Analysis, 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2003.
[TB97] L.N. Trefethen, D. Bau: Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 1997.
[BDB16] R.L. Burden, J.D. Faires, A.M. Burden: Numerical Analysis, 10th edition, Cengage Learning, Boston, 2016.
[GL] G.H. Golub, C.F. Van Loan: Matrix Computations, 3rd edition, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1996.