Diskretne strukture

Peti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

5. november 2020

Interpretacija izjavne formule

Interpretacija $\mathcal{I}$ izjavne formule W je sestavljena iz neprazne množice $\mathcal{D}$, ki ji pravimo **področje pogovora** interpretacije.

Poleg tega

- vsakemu **predikatu** ustreza $0/1$ **logična funkcija** v $\mathcal{D}$
- vsaki **konstanti** določimo **vrednost** v $\mathcal{D}$ (ponavadi je implicitno določena že z imenom konstante)
- vsaki **prosti** spremenljivki v W določimo **vrednost** v $\mathcal{D}$, pri tem vsem prostim spremenljivkam z istim imenom določimo *isto* vrednost iz $\mathcal{D}$.

Pomen kvantifikatorjev

Naj bo W formula. Z $W(x/a)$ označimo formulo, ki jo dobimo tako, da v formuli W vse **proste** vstope spremenljivke x nadomestimo z a.

W	$P(x) \vee \exists x\, Q(x,y) \wedge R(b,x)$
$W(x/a)$	$P(a) \vee \exists x\, Q(x,y) \wedge R(b,a)$

Ne zamenjamo spremenljivke y in vezanega vstopa x-a.

Formula $\forall x\, W$ je **resnična** v **interpretaciji** $\mathcal{I}$, če je za **vsak** element področja pogovora $d \in \mathcal{D}$ resnična formula $W(x/d)$. Sicer je $\forall x\, W$ neresnična.

Formula $\exists x\, W$ je **resnična** v **interpretaciji** $\mathcal{I}$, če v področju pogovora **obstaja** $d \in \mathcal{D}$, za katerega je formula $W(x/d)$ resnična. Sicer je $\exists x\, W$ neresnična.

Preimenovanje spremenljivk

V formuli nas motijo spremenljivke z istim imenom, ki so vezane z več različnimi kvantifikatorji ali pa hkrati proste in vezane.

Dejstvo: če je W formula, potem imen **prostih spremenljivk ne smemo spreminjati**, če želimo pridelati enakovredno formulo.

Želja: **Vezane** spremenljivke lahko **preimenujemo** tako, da **ista** spremenljivka (tj. spremenljivka z istim imenom)

- ne nastopa pri več kvantifikatorjih,
- ni hkrati vezana in prosta.

Primer

Preimenuj spremenljivke v spodnji formuli v skladu z zgornjo željo:

$$\forall x \exists y\, (P(x,y) \Rightarrow \exists x\, Q(x,y) \vee \forall y\, R(x,y)) \vee S(y).$$

Enakovredne izjavne formule

Izjavni formuli W in V sta **enakovredni**, če imata **isto** logično **vrednost** v **vseh** možnih **interpretacijah**. To označimo z $W \sim V$.

Interpretacija formul W in V pomeni, da vse predikate, konstante in spremenljivke hkrati izbiramo iz istega področja pogovora. Tudi pomen predikatov v obeh formulah mora biti isti.

Izjavna formula W je **splošno veljavna**, če je **resnična** v **vsaki** interpretaciji.

Izjavna formula V je **neizpolnljiva**, če je **neresnična** v **vsaki** interpretaciji.

Splošno veljavne in neizpolnljive izjavne formule so ustreznice tavtologij in protislovij v predikatnem računu.

Zakoni predikatnega računa

Pomembni pari enakovrednih izjavnih formul:

1. **de Morganova zakona**:

$$\neg\forall x\, W \sim \exists x\, \neg W$$
$$\neg\exists x\, W \sim \forall x\, \neg W$$

2. **zamenjava istovrstnih kvantifikatorjev**:

$$\forall x \forall y\, W \sim \forall y \forall x\, W$$
$$\exists x \exists y\, W \sim \exists y \exists x\, W$$

3. **distributivnost**:

$$\forall x\, (W \wedge V) \sim \forall x\, W \wedge \forall x\, V$$
$$\exists x\, (W \vee V) \sim \exists x\, W \vee \exists x\, V$$

Zakoni predikatnega računa z omejitvami

Če se x **ne pojavi prosto** v formuli C, potem veljajo naslednje enakovredosti:

1. **kvantifikator in disjunkcija**:

$$\forall x\,(C \vee W) \sim C \vee \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \vee W) \sim C \vee \exists x\, W$$

2. **kvantifikator in konjunkcija**:

$$\forall x\,(C \wedge W) \sim C \wedge \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \wedge W) \sim C \wedge \exists x\, W$$

Kaj pa implikacija?

Privzemimo, da x **ne nastopa prosto** v C in računajmo:

1. **$\forall$ in implikacija 1**:

$$\begin{array}{rl} & \forall x\,(W \Rightarrow C) \\ \sim & \forall x\,((\neg W) \vee C) \\ \sim & (\forall x\,\neg W) \vee C \\ \sim & \neg\exists x\, W \vee C \\ \sim & \exists x\, W \Rightarrow C \end{array}$$

2. **$\forall$ in implikacija 2**:

$$\begin{array}{rl} & \forall x\,(C \Rightarrow W) \\ \sim & \forall x\,((\neg C) \vee W) \\ \sim & (\neg C) \vee \forall x\, W \\ \sim & C \Rightarrow \forall x\, W \end{array}$$

Premislite tudi za eksistenčni kvantifikator.

Preneksna normalna oblika

Trditev

Vsako formulo lahko enakovredno zapišemo tako, da se kvantifikatorji nahajajo samo na začetku.

Formuli iz trditve pravimo **preneksna normalna oblika** dane izjavne formule.

Postopek:

1. **Preimenujemo** spremenljivke.
2. **Znebimo** se $\Rightarrow$ in $\Leftrightarrow$, raje imamo $\neg$, $\wedge$ in $\vee$.
3. Izvlečemo **kvantifikatorje** na **začetek** z uporabo zakonov predikatnega računa.

Primer

Preoblikuj naslednjo izjavno formulo v preneksno normalno obliko:

$$\forall x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \Rightarrow D(x) \wedge \exists x\, D(x)$$

Pozor - zamenjava kvantifikatojrev

Zamenjava raznovrstnih kvantifikatorjev v splošnem **ni možna**.

$$P(x, y) \quad \ldots \quad x \text{ pozna } y\text{-ona.}$$

Včasih vseeno lahko zamenjamo.

Primer

Dokaži naslednjo enakovrednost:

$$\forall x \exists y \, (P(x) \wedge Q(y)) \;\sim\; \exists y \forall x \, (P(x) \wedge Q(y))$$