Poglavje 4
Interpolacija in aproksimacija

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

9. november 2020

Interpolacija: uvod

Aproksimirati želimo neznano funkcijo $f(x)$ z 'bolj obvladljivimi' funkcijami, npr.:

1. Polinomi.
2. Odsekoma polinomskimi funkcijami.
3. Racionalnimi funkcijami.
4. Trigonometričnimi funkcijami.
5. Drugo (eksponentna funkcija, Besselove funkcije, itd.)

Kako aproksimirati $f(x)$ z $g(x)$? V kakšnem smislu je aproksimacija dobra?

1. **Interpolacija**: $g(x)$ mora imeti iste vrednost kot $f(x)$ na dani množici točk.
2. **Metoda najmanjših kvadratov**: $g(x)$ se mora čim bolj prilegati $f(x)$, tj. 2-norma

   $$\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 \, dt$$

   mora biti čim manjša.
3. **Aproksimacija Čebiševa**: $g(x)$ se mora čim bolj prilegati $f(x)$ v smislu supremum norme, tj. minimizirati želimo

   $$\max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

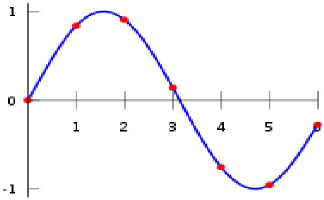
Interpolacijski polinom - standardna baza

Danih imamo $n+1$ različnih točk $x_0, \ldots, x_n$, in vrednosti $y_0, \ldots, y_n$. Iščemo polinom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

stopnje n, ki zadošča

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1, \quad \ldots, \quad p(x_n) = y_n. \tag{1}$$



Dobimo sistem

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= y_1, \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= y_n. \end{aligned}$$

Polinomu $p(x)$ pravimo **interpolacijski polinom**.

Interpolacijski polinom - standardna baza

V matrični obliki lahko sistem zapišemo kot

$$Ax = b,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ & & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Matriki A pravimo **Vandermondova matrika** na točkah $x_0, \dots, x_n$, velja pa

$$\boxed{\det(A) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)}.$$

Posledica

Če so točke x_i, $i = 0, \dots, n$ paroma različne, ima sistem enolično rešitev. Polinom stopnje največ n skozi $n+1$ točk je enoličen.

Interpolacijski polinom - standardna baza

Vprašanje

- Ali je to “dober” sistem za reševanje?

Računanje interpolacijskega polinoma s pomočjo Vandermondove matrike je **zamudno** ($\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ operacij), poleg tega pa je **pogojenostno število** $\kappa(A)$ v primeru ekvidistantnih točk na intervalu $[0, 1]$:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \quad \dots, x_n = 1,$$

za

- $n = 5$: približno $4.9 \cdot 10^3$,
- $n = 10$: približno $1.2 \cdot 10^8$,
- $n = 20$: približno $9.7 \cdot 10^{16}$,

Interpolacijski polinom - Lagrangeova baza

Primer. Poišči polinom najnižje stopnje, ki interpolira $(1.4, 3.7)$ in $(1.25, 3.9)$.

Direktno

$$p_1(x) = \left(\frac{x - 1.25}{1.4 - 1.25}\right) 3.7 + \left(\frac{x - 1.4}{1.25 - 1.4}\right) 3.9 = 3.7 + \left(\frac{3.9 - 3.7}{1.25 - 1.4}\right)(x - 1.4) = 3.7 - \frac{4}{3}(x - 1.4)$$

Kaj smo naredili? Zapisali smo $p(x)$ v obliki

$$p(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) y_0 + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) y_1$$

- linearne kombinacije **Lagrangeovih baznih funkcij** $\ell_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$ in $\ell_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$.
- $\ell_0(x)$ je 0 v točki x_1 in 1 v točki x_0, $\ell_1(x)$ pa je nič v točki x_0 in 1 v točki x_1.

Primer. Poišči polinom $p(x)$ stopnje 2 za interpolacijo točk $(\frac{1}{3}, 2)$, $(\frac{1}{4}, -1)$ in $(1, 7)$.

$$\ell_0(x) = \frac{(x - \frac{1}{4})(x - 1)}{(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})(\frac{1}{3} - 1)}, \qquad \ell_1(x) = \frac{(x - \frac{1}{3})(x - 1)}{(\frac{1}{4} - \frac{1}{3})(\frac{1}{4} - 1)}, \qquad \ell_2(x) = \frac{(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{4})}{(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})}.$$

Velja:

$$p(x) = 2\ell_0(x) - \ell_1(x) + 7\ell_2(x).$$

Interpolacijski polinom - Lagrangeova baza

Danih imamo $n+1$ točk $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Cilj je najti polinome stopnje največ n , ki zadoščajo

$$\ell_i(x_0) = \ell_i(x_1) = \ldots = \ell_i(x_{i-1}) = 0, \qquad \ell_i(x_i) = 1, \qquad \ell_{i+1}(x_i) = \ell_{i+2}(x_i) = \ldots = \ell_n(x_i) = 0.$$

Torej je

$$\ell_i(x) = C_i \cdot (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n),$$

kjer je C_i neka konstanta in $i = 0, 1, \ldots, n$.

C_i pa določimo iz pogoja $\ell_i(x_i) = 1$ in dobimo

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

Interpolacijski polinom v Lagrangeovi obliki je

$$p(x) = \ell_0(x)y_0 + \ell_1(x)y_1 + \ldots + \ell_n(x)y_n.$$

Interpolacijski polinom - Newtonova baza

- Interpolacija prek standardne monomske baze $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ povzroči slabo pogojenost, je pa poceni za računanje (Horner).
- Interpolacija prek Lagrangeove baze $\{\ell_0(x), \ell_1(x), \ldots, \ell_n(x)\}$ je boljša v smislu pogojenosti, vendar pa je računanje drago (nimamo gnezdene oblike kot pri Hornerju in vsaka bazna funkcija enakovredna v smislu cene računanja). Poleg tega z dodajanjem novih točk ne moremo izkoristiti že znanih rezultatov, ampak moramo vse Lagrangeove polinome znova računati. Tako moramo že na začetku določiti stopnjo interpolacije.

- **Newtonovi interpolacijski polinomi** na točkah $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

- Baza so polinomi

$$1, \quad x - x_0, \quad (x - x_0)(x - x_1), \quad \ldots, \quad (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

- Newtonova baza je stabilnejša od standardne baze.
- So boljši za računanje - z gnezdeno iteracijo - kot Lagrangeovi polinomi.

Interpolacijski polinom - Newtonova baza

Interpolirajmo podatke (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) v Newtonovi obliki.

Poiskati moramo koeficiente a_0, a_1 in a_2 v polinomu

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Iz n podatkov dobimo sistem n linearnih enačb v neznanih koeficientih:

$$\begin{aligned}
x_0 : &\quad y_0 = a_0 + 0 + 0 \\
x_1 : &\quad y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + 0 \\
x_2 : &\quad y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)
\end{aligned}$$

Ali v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Ker je matrika spodnje trikotna, potrebujemo samo $\mathcal{O}(n^2)$ operacij:

$$\begin{aligned}
a_0 &= y_0 = f(x_0), \\
a_1 &= \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\
a_2 &= \frac{y_2 - a_0 - (x_2 - x_0)a_1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - (x_2 - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}. + -
\end{aligned}$$

Interpolacijski polinom - Newtonova baza

Iz tega vidimo vzorec. Pojavljajo se izrazi oblike $f[x_i, x_j] := \frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$ Na zgornjem primeru dobimo:

$$a_0 = f(x_0), \qquad a_1 = f[x_0, x_1], \qquad a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

To se da posplošiti do rekurzivnega računanja polinomov v Newtonovi obliki. Označimo z $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ **vodilni koeficient** interpolacijskega polinoma stopnje največ k, ki se z f ujema v točkah $x_0, \ldots, x_k$.

Izrek

1. *Koeficienti Newtononovega interpolacijskega polinoma p_n stopnje največ n, ki se z f ujema v točkah $x_0, \ldots, x_n$, so enaki*

$$a_0 = f[x_0], \qquad a_1 = f[x_0, x_1], \qquad a_2 = f[x_0, x_1, x_2], \ldots, \qquad a_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

2. *Deljene diference povezuje formula*

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & x_0 = x_1 = \ldots = x_k, \\ \frac{f[x_1,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Računanje deljenih diferenc

Deljene diference pa lahko bolj učinkovito računamo s pomočjo tabel:

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Konstruirajmo deljene diference za podatke $(1,3)$, $(\frac{3}{2},\frac{13}{4})$, $(0,3)$, $(2,\frac{5}{3})$.

Iz tabele deljenih diferenc preberimo interpolacijski polinom.

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

Interpolacijski polinom je tako

$$p_2(x) = 3 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) - 2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)x.$$

Višanje stopnje aproksimacije

Višanje stopnje interpolacijskega ne izboljša vedno aproksimacije funkcije s polinomom. Znan je Rungejev primer, ko funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

interpoliramo na intervalu $[-5, 5]$ z ekvidistantnimi točkami, tj.

$$x_0 = -5, \quad x_1 = -5 + 10 \cdot \frac{1}{n}, \quad x_2 = -5 + 10 \cdot \frac{2}{n}, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = -5 + 10 \cdot \frac{n-1}{n}, \quad x_n = 5.$$

Pričakujemo, da se bo interpolacijski polinom vse bolj prilegam naši funkciji. Izkaže pa se, da temu ni tako. Če interpoliramo v točkah Čebiševa

$$x_0 = 5\cos\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right), \quad x_1 = 5\cos\left(\frac{3\pi}{2(n+1)}\right), \quad \ldots, \quad x_n = 5\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2(n+1)}\right),$$

pa z višanjem stopnje res dobimo boljše prileganje.

Toda: Za kateri koli nabor točk obstaja funkcija, za katero z višnjam stopnje interpolacijskega polinoma ne dobimo boljšega prileganja.

Rešitev problema višanja stopnje polinoma je uporaba zlepkov polinomov nizkih stopenj. Najboljši so kubični zlepki.

Napaka polinomske interpolacije

Ponavadi nas zanima razlika med vrednostjo funkcije f in vrednostjo interpolacijskega polinoma p_n v neki točki t, tj. $e_n(t) = p_n(t) - f(t)$. Naj bo q_{n+1} interpolacijski polinom funkcije f skozi točke $x_0, \ldots, x_n$ in t:

$$q_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Iz enakosti $f(t) = q_{n+1}(t)$ sledi

$$e_n(t) = p_n(t) - f(t) = -f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t] \cdot \prod_{i=0}^{n} (t - x_i).$$

Za oceno napako moramo oceniti še vrednost $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t]$.

Izrek

Obstaja $\xi \in [a, b]$, tako da velja

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t]\,\omega(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Posledica

Naj bo f vsaj $(n+1)$-krat zvezno odvedljiva na intervalu $[a, b]$ in naj bo p_n interpolacijski polinom stopnje največ n skozi točke x_i, $i = 0, \ldots, n$, ki vse ležijo na intervalu $[a, b]$. Potem za vsak $x \in [a, b]$ obstaja $\xi \in [a, b]$, da velja

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n).$$

Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Za funkcijo, podano v n točkah $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, iščemo polinom p_k stopnje $k \leqslant n$, za katerega ima izraz

$$E_{LSQ} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (p_k(x_i) - y_i)^2}$$

najmanjšo vrednost. Če zapišemo na dolgo:

$$E_{LSQ} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_k x_i^k - y_i)^2}.$$

Torej iščemo ekstrem funkcije več spremenljivk. Iz analize vemo, da je potreben pogoj za ekstrem

$$\frac{\partial E_{LSQ}}{\partial a_0} = \frac{\partial E_{LSQ}}{\partial a_1} = \ldots = \frac{\partial E_{LSQ}}{\partial a_k} = 0.$$

Naj bo

$$s_1 = x_0 + \ldots + x_n, \quad s_2 = x_0^2 + \ldots + x_n^2, \quad \ldots, \quad s_{2k} = x_0^{2k} + \ldots + x_n^{2k}.$$

Dobimo normalni sistem:

$$\begin{bmatrix} n & s_1 & s_2 & \cdots & s_k \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{k+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & s_{k+2} & \cdots & s_{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \\ \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k \end{bmatrix},$$

ki pa je pri velikiem številu točk lahko slabo pogojen.

Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Če bi namesto baze $\left\{1, x, \ldots, x^k\right\}$ vzeli novo bazo polinomov $\{g_0(x), g_1(x), \ldots, g_k(x)\}$, bi dobili sistem linearnih enačb:

$$
\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=0}^{n} g_0^2 + a_1 \sum_{i=0}^{n} g_1 g_0 + \ldots + a_k \sum_{i=0}^{n} g_k g_0 &= \sum_{i=0}^{n} y_i g_0, \\
a_0 \sum_{i=0}^{n} g_0 g_1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} g_1^2 + \ldots + a_k \sum_{i=0}^{n} g_k g_1 &= \sum_{i=0}^{n} y_i g_1, \\
a_0 \sum_{i=0}^{n} g_0 g_2 + a_1 \sum_{i=0}^{n} g_1 g_2 + \ldots + a_k \sum_{i=0}^{n} g_k g_2 &= \sum_{i=0}^{n} y_i g_2, \\
&\vdots \\
a_0 \sum_{i=0}^{n} g_0 g_k + a_1 \sum_{i=0}^{n} g_1 g_k + \ldots + a_k \sum_{i=0}^{n} g_k^2 &= \sum_{i=0}^{n} y_i g_k.
\end{aligned}
$$

Zaporedje funkcij $g_0, \ldots, g_k$ je **ortogonalno** na sistemu točk x_i, $i = 0, \ldots, n$, če je

$$
\sum_{i=0}^{n} g_j(x_i) g_k(x_i) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \neq 0, & j = k \end{cases}
$$

Aproksimacijska funkcija $g(x)$ v tej bazi je

$$
g(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j g_j(x), \quad \text{kjer je } c_j = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i g_j(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} g_j^2(x_i)}.
$$

Ortogonalni polinomi nad sistemom točk

Izrek

Naj bo $t_1, t_2, \ldots, t_k$ sistem ortogonalnih polinomov na sistemu točk x_i, $i = 0, \ldots, n$, pri čemer je t_j stopnje j. Vsak polinom iz ortogonalnega zaporedja polinomov je ortogonalen na vse polinome nižje stopnje, tj.

$$\sum_{i=0}^{n} t_m(x_i)p_j(x_i) = 0, \quad za \quad j < m.$$

Izrek

Zaporedje eničnih ortogonalnih polinomov zadošča tričlenski rekurzivni relaciji

$$t_{i+1}(x) = (x - \alpha_{i+1})t_i(x) - \beta_i t_{i-1}(x),$$

kjer so koeficienti α_i, β_i določeni z enačbami

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=0}^{n} x_j t_{i-1}^2(x_j)}{\sum_{j=0}^{n} t_{i-1}^2(x_j)}, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_i = \frac{\sum_{j=0}^{n} t_i^2(x_j)}{\sum_{j=0}^{n} t_{i-1}^2(x_j)}.$$

Velja še $t_0(x) = 1$.

Prednosti normalnega sistema, zapisanega z ortogonalnimi polinomi, pred navadnim normalnim sistemom:

- Sistem ima diagonalno obliko.
- Če z aproksimacijo stopnje k nismo zadovoljni, preprosto dodamo še en ortogonalni polinom.