Poglavje 5

Numerično integriranje

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

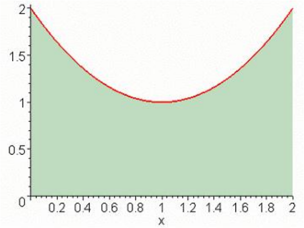
16. november 2020

Numerična integracija

Naš cilj je izračunati določen integral

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

funkcije $f(x)$. Tu je F nedoločen integral funkcije f.

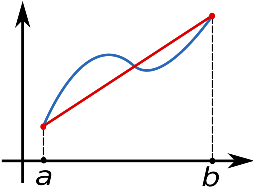


Če ne znamo izračunati nedoločenega integrala F, smo v težavah. Npr. za $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, $h(x) = x \tan x$.

Prav tako ne moremo točno izračunati vrednosti integrala, če imamo funkcijo podano samo na neki množici točk.

Osnovno trapezno pravilo in napaka E

Integral $\int_a^{a+h} f(x)\,dx$ tako, da f aproksimiramo z linearno funkcijo in izračunamo ploščino pod linearno funkcijo oz. trapezom.



$$\boxed{p(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$$

Velja

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,\frac{(b-a)^2}{2} = \boxed{\frac{(b-a)}{2}\,(f(a)+f(b))}.$$

$$\begin{aligned}
E &= \int_a^b (f(x)-p(x))\,dx = \int_a^b f[a,b,x](x-b)(x-a)\,dx \\
&= f[a,b,\xi]\cdot\int_a^{a+h}(x-b)(x-a)\,dx = \frac{f''(\eta)}{2}\left(-\frac{1}{6}(b-a)^3\right) = \boxed{-\frac{(b-a)^3 f''(\eta)}{12}},
\end{aligned}$$

kjer sta $\xi,\eta\in[a,b]$, tretja enakost sledi po izreku o povprečni vrednosti, četrta pa po izreku o $f[a,b,\eta]$.

Sestavljeno trapezno pravilo in napaka

Če interval $[a, b]$ razdelimo z ekvidistantnimi točkami $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tj. $h := h_i = x_{i+1} - x_i$ je konstanta, dobimo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + f(x_{i+1}) = \boxed{\frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)}$$

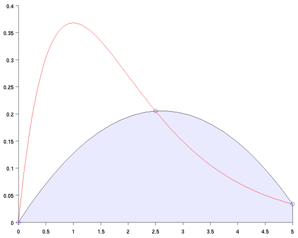
Napaka E_i na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ je enaka $E_i = -\frac{h^3 f^{(2)}(\eta_i)}{12}$ za nek $\eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Torej je skupna napaka

$$E = \sum_{i=0}^{n-1} E_i = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{h^3 f^{(2)}(\eta_i)}{12} = -n\frac{h^3 f^{(2)}(\eta)}{12} = -\frac{(b-a)h^2 f^{(2)}(\eta)}{12},$$

kjer je $\eta \in [a, b]$ in smo v tretji enakosti uporabili izrek o srednji vrednosti.

Enostavno Simpsonovo pravilo in napaka

Naj bo p_2 polinom stopnje 2, s katerim interpoliramo točke $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$, $(b, f(b))$:



$$\boxed{p_2(x) = f(a) + f\left[a, \frac{a+b}{2}\right](x-a) + f\left[a, \frac{a+b}{2}, b\right](x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}.$$

Označimo $h = \frac{b-a}{2}$. Računamo $\int_a^b p_2(x)dx$ (naredimo subsitucijo $x = a + t$, $t \in [0, 2h]$):

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+2h} p_2(x)\,dx &= \int_0^{2h} p_2(a+t)\,dt = f(a)2h + \frac{f(a+h)-f(a)}{h}2h^2 + \frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{2h^2}\frac{2}{3}h^3 \\
&= \boxed{\frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right)}.
\end{aligned}$$

Napaka E pri enostavnem Simpsonovem pravilu

Taylorjeva polinoma stopnje 4 za funkcijo f v točki a z $\Delta = h$ oz. $\Delta = 2h$ sta:

$$\begin{aligned} f(a+h) &\approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(a), \\ f(a+2h) &\approx f(a) + 2hf'(a) + 2h^2f''(a) + \frac{4h^3}{3}f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{3}f^{(4)}(a). \end{aligned}$$

Seštejemo in dobimo, da je $\frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right]$ približno

$$2hf(a) + 2h^2f'(a) + \frac{4}{3}h^3f''(a) + \frac{2}{3}h^4f^{(3)}(a) + \frac{5}{18}h^5f^{(4)}(a) \tag{1}$$

Integriramo Taylorjev polinom

$$p_4(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + \frac{(x-a)^4}{4!}f^{(4)}(a)$$

stopnje 4 za $f(x)$ in dobimo

$$\int_a^{a+2h} f(x)\,dx \approx 2hf(a) + 2h^2f'(a) + \frac{4}{3}h^3f''(a) + \frac{2}{3}h^4f^{(3)}(a) + \frac{4}{15}h^5f^{(4)}(a). \tag{2}$$

Torej imamo pri osnovnem pravilu napako približno

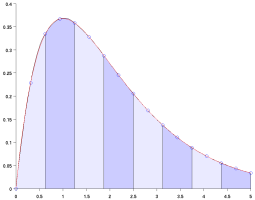
$$\boxed{-\frac{1}{90}h^5f^{(4)}(\xi)}, \quad \xi \in [a,b]$$

Sestavljeno Simpsonovo pravilo in napaka

Vzemimo ekvidistantno particijo intervala $[a, b]$ $P = \{x_0 = a < \cdots < x_n = b\}$, na sodo število enako dolgih intervalov in na zaporednih trojicah točk uporabimo osnovno Simpsonovo pravilo ($h = x_{i+1} - x_i$):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{h}{3}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})]$$

$$= \boxed{\frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]}.$$



Napaka E_i na intervalu $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ je enaka $E_i = -\frac{h^5 f^{(4)}(\eta_i)}{90}$ za nek $\eta_i \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$. Torej je skupna napaka

$$E = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} E_i = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} -\frac{h^5 f^{(4)}(\eta_i)}{90} = -\frac{n}{2}\frac{h^5 f^{(4)}(\eta)}{90} = \boxed{-\frac{(b-a)h^4 f''(\eta)}{180}},$$

kjer je $\eta \in [a, b]$ in smo v tretji enakosti uporabili izrek o srednji vrednosti.

Pridobimo dva reda v primerjavi s trapeznim pravilom.

Osnovna Newton-Cotesova pravila na $[a, b]$

Newton-Cotesova pravila interval $[a, b]$ razdelijo z $n + 1$ ekvidistantnimi točkami in $\int_a^b f(x)dx$ aproksimirajo z $\int_a^b p_n(x)dx$, kjer je p_n interpolacijski polinom stopnje n na teh točkah.

ime	n	formula
trapezno	1	$\frac{(b-a)}{2}\,[f(a) + f(b)]$
Simp. $1/3$	2	$\frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]$
Simp. $3/8$	3	$\frac{(b-a)}{8}\,[f(a) + 3f(a+h) + 3f(b-h) + f(b)]$
Boolovo	4	$\frac{(b-a)}{90}\left[7f(a) + 32f(a+h) + 12f(\frac{a+b}{2}) + 32f(b-h) + 7f(b)\right]$

Ocene napak:

ime	n	napaka	h
trapezno	1	$-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)$	$h = b - a$
Simpsonovo $1/3$	2	$-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi)$	$h = (b-a)/2$
Simpsonovo $3/8$	3	$-\frac{(b-a)h^4}{80}f^{(4)}(\xi)$	$h = (b-a)/3$
Booleovo	4	$-\frac{2(b-a)h^6}{945}f^{(6)}(\xi)$	$h = (b-a)/4$

Izpeljava Newton-Cotesovih pravil z metodo nedoločenih koeficientov

Izpeljati želimo integracijsko formulo na danih (ekvidistantnih) $n+1$ točkah, vozlih, ki bo točna za polinome stopnje največ n:

$$\int_a^{a+nh} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(a+ih) + R(f(x)),$$

kjer so $a_0, \ldots, a_n$ iskani koeficienti, $R(f(x))$ pa napaka. Na ta način izpeljimo Simpsonovo $3/8$ pravilo.

$$\int_0^{3h} f(x)\, dx = a_0 f(0) + a_1 f(h) + a_2 f(2h) + a_3 f(3h) + R(f(x)),$$

Želimo :

$$R(1) = R(x) = R(x^2) = R(x^3) = 0.$$

Simpsonovo $3/8$-pravilo:

$$\begin{aligned} \int_0^{3h} 1\, d &= 3h = a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \\ \int_0^{3h} x\, dx &= \frac{9h}{2} = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \\ \int_0^{3h} x^2\, dx &= \frac{27h}{3} = a_1 + 4a_2 + 9a_3, \\ \int_0^{3h} x^3\, dx &= \frac{81h}{4} = a_1 + 8a_2 + 27a_3. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{3}{8}h, \\ a_1 &= \frac{9}{8}h, \\ a_2 &= \frac{9}{8}h, \\ a_3 &= \frac{3}{8}h. \end{aligned}$$

Predvidevamo, da je napaka $R(f(x))$ oblike $D \cdot f^{(4)}(\xi)$, kjer je $\xi \in [a, b]$. Za $f(x) = x^4$ dobimo

$$\int_0^{3h} x^4\, dx = \frac{3^5}{5} h^5 = \frac{3}{8} h (3h^4 + 3 \cdot 2^4 \cdot h^4 + 3^4 h^4) + 24D \qquad \Rightarrow \qquad D = -\frac{3}{80} h^5.$$

Torej:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{8} [f(a) + 3f(a+h) + 3f(b-h) + f(b)] - \frac{(b-a)h^4}{80} f^{(4)}(\xi)}.$$

Izbira koraka v trapeznem pravilo

Spomnimo se, da pri sestavljenem trapeznem pravilu $T(h)$ za napako $E(h)$ velja:

$$E(h) := T(h) - I = \frac{b-a}{12} f''(\xi_h) h^2, \quad \text{kjer je } \xi_h \in (a,b).$$

Želimo se izogniti dejstvu, da moramo poznati f''. Zapišimo napako še v primeru razpolovljenega koraka, tj. $\frac{h}{2}$:

$$E(h/2) := T(h/2) - I = \frac{b-a}{12} f''(\xi_{h/2}) \frac{h^2}{4}, \quad \text{kjer je } \xi_{h/2} \in (a,b).$$

Predpostavimo, da je $\frac{b-a}{12} f''(\xi_h)$ približno C za vsak h:

$$I = T(h) - Ch^2 + \mathcal{O}(h^4) = T(h/2) - \frac{C}{4} h^2 + \mathcal{O}(h^4).$$

Sledi:

$$T(h) - T(h/2) = \frac{3}{4} Ch^2 + \mathcal{O}(h^4) \qquad \text{oz.} \qquad Ch^2 \approx \frac{4}{3}(T(h) - T(h/2)).$$

Tako sta

$$\frac{4}{3}(T(h) - T(h/2)), \quad \frac{1}{3}(T(h) - T(h/2))$$

približka za napaki $E(h)$ in $E(h/2)$. Velja

$$T(h/2) = \underbrace{\frac{T(h)}{2}}_{\text{razplovimo } T(h)} + \underbrace{\frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n} f(a + (i - 1/2)h)}_{\text{računamo samo ta del}}, \quad n = (b-a)/h.$$

Algoritem:

1. Izračunamo $T(b-a) = (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$.
2. Izračunamo $T((b-a)/2) = \frac{T(b-a)}{2} + \frac{b-a}{2} f((a+b)/2)$.
3. Izračunamo $\frac{1}{3}(T(b-a) - T((b-a)/2))$. Če je to dovolj majhno po absolutni vrednosti, končamo, pribižek za integral pa je $T((b-a)/2)$. Sicer ponovimo postopek z razpolovljenim h.

Rombergova metoda

Če je naša funkcija $(2k+2)$-krat odvedljiva, lahko napako trapezne formule razvijemo v konvergentno vrsto po sodih potencah h:

$$E(h) := T(h) - I = C_1 h^2 + C_2 h^4 + \ldots + C_k h^{2k} + \mathcal{O}(h^{2k+2}),$$

pri čemer so konstante $C_1, \ldots, C_k$ **neodvisne** od h.

Torej velja

$$
\begin{aligned}
I &= T(h) + C_1 h^2 + C_2 h^4 + \ldots + C_\ell h^{2\ell} + \mathcal{O}(h^{2\ell+2}),\\
I &= T(h/2) + C_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + C_2 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots + C_\ell \left(\frac{h}{2}\right)^{2\ell} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{2\ell+2}\right),\\
I &= T(h/4) + C_1 \left(\frac{h}{4}\right)^2 + C_2 \left(\frac{h}{4}\right)^4 + \ldots + C_\ell \left(\frac{h}{4}\right)^{2\ell} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{4}\right)^{2\ell+2}\right),\\
&\vdots,\\
I &= T\left(\frac{h}{2^k}\right) + C_1 \left(\frac{h}{2^k}\right)^2 + C_2 \left(\frac{h}{2^k}\right)^4 + \ldots + C_\ell \left(\frac{h}{2^k}\right)^{2\ell} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{2^k}\right)^{2\ell+2}\right),
\end{aligned}
$$

Sledi

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{4T(h/2) - T(h)}{3} + \frac{C_2}{3}\left(\frac{1}{2^2} - 1\right) h^4 + \ldots + \frac{C_\ell}{3}\left(\frac{1}{2^{2\ell-2}} - 1\right) h^{2\ell} + \mathcal{O}(h^{2\ell+2})\\
I &= \frac{4T(h/4) - T(h/2)}{3} + \frac{C_2}{3}\left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots + \frac{C_\ell}{3}\left(\frac{1}{2^{2\ell-2}} - 1\right)\left(\frac{h}{2}\right)^{2\ell} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^{2\ell+2}\right)\\
&\vdots\\
I &= \frac{4T\left(\frac{h}{2^k}\right) - T\left(\frac{h}{2^{k-1}}\right)}{3} + \frac{C_2}{3}\left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{h}{2^{k-1}}\right)^4 + \ldots + \frac{C_\ell}{3}\left(\frac{1}{2^{2\ell-2}} - 1\right)\left(\frac{h}{2^{k-1}}\right)^{2\ell} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{2^{k-1}}\right)^{2\ell+2}\right)
\end{aligned}
$$

Rombergova metoda

Torej so

$$\boxed{T_1(h/2^k) = \frac{4T(h/2^k) - T(h/2^{k-1})}{3}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

boljši približki za I, saj je

$$I = T_1(h/2^k) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{2^{k-1}}\right)^4\right).$$

Nadaljujemo:

$$\boxed{T_2(h/2^k) = \frac{4^2 T_1(h/2^k) - T_1(h/2^{k-1})}{4^2 - 1}}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots,$$

ki so še boljši približki za I, saj je

$$I = T_2(h/2^k) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{2^{k-1}}\right)^6\right).$$

Na m-tem koraku dobimo

$$\boxed{T_m(h/2^k) = \frac{4^m T_{m-1}(h/2^k) - T_{m-1}(h/2^{k-1})}{4^m - 1}}, \quad k = m, m+1, m+2, \ldots$$

in

$$I = T_m(h/2^k) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{2^{k-1}}\right)^{2(m+1)}\right).$$

Rombergova metoda

$$
\begin{tikzcd}
R_{1,1} \arrow[dr] & & & & \\
R_{2,1} \arrow[r] \arrow[dr] & R_{2,2} \arrow[dr] & & & \\
R_{3,1} \arrow[r] & R_{3,2} \arrow[r] & R_{3,3} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
R_{n,1} \arrow[r] & R_{n,2} \arrow[r] & R_{n,3} & \cdots & R_{n,n}
\end{tikzcd}
$$

Kvadraturne formule

- Doslej so bile vse formule (Newton-Cotesova pravila) za integriranje, tj. **kvadraturne formule**, oblike

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j), \tag{3}$$

  kjer so točke x_j enakomerno razporejeni **vozli**, w_j pa **uteži**.
- Vemo pa že iz poglavja o interpolacijskih polinomih, da ekvidistantne točke niso vedno najboljša izbira.
- Rešili se bomo ekvidistantnih vozlov.
- Kombinirali bomo izbiro vozlov in uteži v kvadraturnih formulah.
- V formuli (3) bomo izbirali vozle in koeficiente na optimalen način, tako da maksimiziramo stopnjo natančnosti, tj. kvadraturno pravilo bo točno za polinome visokih stopenj.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$$

- imamo $n+1$ točk $x_j \in [a,b]$,

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leqslant b.$$

- imamo $n+1$ realnih koeficientov w_j
- skupaj imamo $2n+2$ neznank
- v primeru splošnega Newton-Cotesovega pravila imamo $n+1$ neznank ($n+1$ uteži)

Opomba

$2n+2$ *neznank (z uporabo* $n+1$ *uteži) lahko uporabimo za točno interpolacijo in integacijo polinomov stopnje največ* $2n+1$

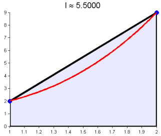
Primer boljših vozlov - za interval $[-1, 1]$

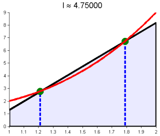
Oglejmo si primer $n = 1$ (tj. 2 točki) na primeru intervala $[-1, 1]$. Poiščimo w_0, w_1, x_0, x_1, tako da velja

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1),$$

pri čemer je aproksimacija kar se da točna.

$$\int_{1}^{2} (x^3 + 1)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_1^2 = 4.75.$$





Cilj: poišči w_0, w_1, x_0, x_1 tako da bi aproksimacija točna za polinome stopnje največ 3:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

To pomeni, da mora za vsak $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ veljati:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3\right)\, dx = w_0 \left(c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + c_3 x_0^3\right) + w_1 \left(c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3\right).$$

Desno stran preuredimo na konstantne, linearne, kvadratične in kubične člene, ter dobimo, da je naslednji izraz

$$c_0 \left(w_0 + w_1 - \int_{-1}^{1} 1 dx\right) + c_1 \left(w_0 x_0 + w_1 x_1 - \int_{-1}^{1} x\, dx\right) + c_2 \left(w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 - \int_{-1}^{1} x^2\, dx\right) + c_3 \left(w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 - \int_{-1}^{1} x^3\, dx\right).$$

ničelen Ker so koeficienti c_0, c_1, c_2 in c_3 poljubni, morajo biti koeficienti pri njih ničelni.

Izpeljava - za interval $[-1, 1]$ in splošni interval $[a, b]$

Od tod sledi:

$$w_0 + w_1 = \int_{-1}^{1} 1 dx = 2 \qquad w_0 x_0 + w_1 x_1 = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$$

$$w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3} \qquad w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$$

Z nekaj algebre pridemo do:

$$w_0 = 1 \quad w_1 = 1 \quad x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Zato:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}.$$

Z linearno substitucijo

$$t = a_0 + a_1 x, \quad t(a) = -1,\ t(b) = 1,$$

preslikamo interval $[a, b]$ na $[-1, 1]$.

Velja $a_0 = -\frac{b+a}{b-a}$ in $a_1 = \frac{2}{b-a}$ ter

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}, \quad dx = \frac{b-a}{2} dt.$$

Sledi:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right) \frac{b-a}{2}\, dt}$$

in lahko uporabimo kvadraturno formulo nad $[-1, 1]$.

Z uporabo dveh točk, $n = 1$, smo dobili točen integral za polinome stopnje največ $2 \cdot 1 + 1 = 3$.

Razširitev Gaussove kvadrature

Sedaj je naš cilj razširiti zgornje pravilo tako, da bo delovalo za polinome višje stopnje, tj. z vsaki dodanim parom vozla in uteži želimo povečati točnost za dve stopnji.

Velja:

- Smiselno kvadraturno pravilo za integracijo nad intervalom $[-1, 1]$ na enem vozlu bi uporabilo $x = 0$. To pa je ničla funkcije

$$\boxed{\phi(x) = x}.$$

- Kvadraturo pravilo na dveh točkah $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ smo dobili za ničli funkcije

$$\boxed{\phi(x) = 3x^2 - 1}.$$

- Kako nadaljevati?

Izrek (Gauss)

Naj bo $q(x)$ netrivialen polinom stopnje $n + 1$, tako da je

$$\int_a^b x^k q(x) dx = 0 \qquad \text{za vsak } k = 0, 1, \ldots, n$$

in naj bodo $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ničle funkcije $q(x)$. Potem velja

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i), \quad \text{kjer je } A_i = \int_a^b \ell_i(x) dx \text{ za } i = 0, \ldots, n,$$

pri čemer ℓ_i označuje i-ti Lagrangeev bazni polinom na točkah $x_0, \ldots, x_n$, pravilo pa je točno za polinome stopnje največ $2n + 1$.

Dokaz Gaussovega izreka

Naj bo $f(x)$ polinom stopnje $2n+1$. Potem velja (delimo f z q):

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x),$$

kjer sta $p(x)$ in $r(x)$ stopnje največ n. Iz predpostavk izreka sledi

$$\int_a^b p(x)q(x)dx = 0 \quad \text{in zato} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b r(x)dx.$$

Interpolacijski polinom za $r(x)$ na točkah $x_0, x_1, \ldots, x_n$ je

$$r(x) = \sum_{i=0}^{n} r(x_i)\ell_i(x).$$

Ker pa so po predpostavki točke $x_0, \ldots, x_n$ ničle polinoma q, velja

$$r(x_i) = f(x_i) \quad \text{za } i = 0, \ldots, n.$$

Sledi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b r(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)dx,$$

pri čemer druga enakost sledi iz dejstva, da je polinom r stopnje največ n.

Legendrovi polinomi

Funkciji $g(x)$ in $h(x)$ sta **orthogonalni** na $[a, b]$, če je

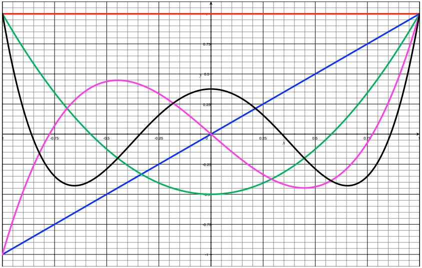
$$\int_a^b g(x)h(x)\,dx = 0$$

Zato bomo za vozle uporabljali ničle ortogonalnih polinomov, **Legendrovih polinomov**:

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x, \quad \phi_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}, \quad \phi_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}, \quad \cdots$$

V splošnem:

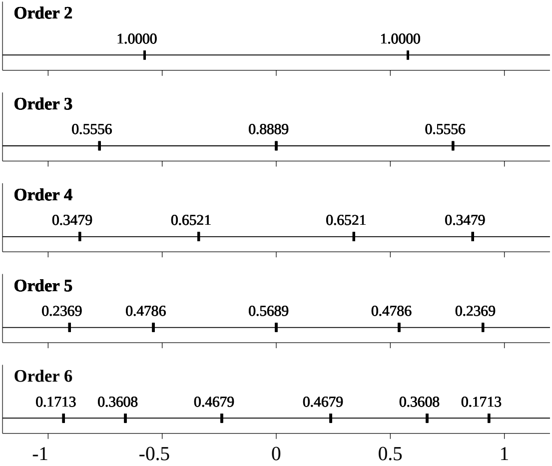
$$\boxed{\phi_n(x) = \frac{2n-1}{n} x\phi_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}\phi_{n-2}(x)} \quad \text{za } n \geqslant 2.$$



Legendrovi polinomi:

- So ortogonalni.
- So naraščajoči v stopnji.
- Niso slabo pogojena baza.
- Nimajo izražave v analitični obliki, ampak potrebujemo rekurzivno relacijo.
- Njihove ničle so vozli Gaussovi kvadraturnih pravil.

Izgled vozlov



Povzetek

Povezava med ničlami Legendrovih polinomov in točno integracijo polinomov je povzeta v naslednjem izreku:

Izrek

Naj bodo $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ničle n-tega Legendrovega polinoma $P_n(x)$ in naj bodo za vsak $i = 0, 1, \ldots, n$ števila w_i definirana s formulami

$$w_i = \int_{-1}^{1} \ell_i(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

Potem za vsak polinom f stopnje največ $2n + 1$ velja

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)}.$$

Za $n = 1$ velja $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Z linearno substitucijo dobimo

$$\int_{1}^{1.5} x^2 \ln x\, dx = \int_{1}^{1.5} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(1.5-1)t + (1.5+1)}{2}\right) \frac{1.5-1}{2}\, dt$$

$$= \quad \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \left(\frac{t+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{t+5}{4}\right) dt = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}+5}{4}\right) + \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+5}{4}\right)^2 \ln\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+5}{4}\right)\right] = 0.1922687$$