Diskretne strukture

Sedmi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

20. november 2020

Množica R je **(dvomestna) relacija** (v množici A), če je vsak njen element **urejen par** (iz $A \times A$).

$$R \text{ je relacija.} \iff \forall x \in R\, \exists u, v \,:\, x = (u, v)$$

Primer

1. $A = \{e, f, g, h\}$ $\quad R = \{(e, f), (f, g), (g, h)\}$
   $xRy \;\ldots\; x$ *je v abecedi neposredno pred* y
2. $A = \mathbb{N}$ $\quad R = \{(x, y)\,;\, x, y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y\}$
3. $\emptyset \subseteq A \times A$ $\quad$ **prazna relacija**
4. $U_A := A \times A \subseteq A \times A$ $\quad$ **univerzalna relacija**
5. $\mathrm{id}_A = \{(x, x)\,;\, x \in A\}$ $\quad$ **relacija enakosti (identitete)**

Namesto $(x, y) \in R$ *pišemo* xRy.

Naj bo R relacija v A.

$\mathcal{D}_R = \{x \,;\, \exists y : xRy\}$ **domena** ali **definicijsko območje** relacije R.

$\mathcal{Z}_R = \{y \,;\, \exists x : xRy\}$ **zaloga vrednosti** relacije R.

Pravimo, da je

1. R **refleksivna** $\iff \forall x \in A : xRx$,
2. R **simetrična** $\iff \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$,
3. R **antisimetrična** $\iff \forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$,
4. R **tranzitivna** $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$,
5. R **enolična** $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$.

Zgledi

Primer

1. *Relacija* id_A *v* A *je refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna in enolična.*
2. *Relacija* $\leq$ *v* $\mathbb{N}$ *je refleksivna, antisimetrična, tranzitivna.*
3. *Relacija* $<$ *v* $\mathbb{N}$ *je antisimetrična, tranzitivna.*
4. *Relacija* $\subseteq$ *v* $\mathcal{P}A$ *je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna.*
5. *Relacija "oče" v množici ljudi (x oče y preberemo kot x je oče y-ona.) je antisimetrična.*

R naj bo relacija v **končni** množici A.

Elemente množice A narišemo kot **točke** v ravnini. Če velja aRb, narišemo **usmerjeno puščico** od a do b.

> elementi A ... točke v ravnini
> aRb ... usmerjena puščica od a do b.

Zgled: $A = \{e, f, g, h\}$ $\qquad R = \{(e, f), (f, g), (g, h)\}$

Vprašanje: Kako iz grafa relacije R videti, katere od lastnosti 1.,...,6. relacija R ima?

Relacije so posebne vrste množic. Vemo, kako so definirane operacije $\cup, \cap$ in $\setminus$.

Ponavadi se pogovarjamo o družini relacij na isti množici A. V takem primeru je **komplement** smiselno definirati kot

$$R^c := (A \times A) \setminus R = U_A \setminus R$$

Poleg navedenih operacij definiramo tudi:

- **inverzno relacijo** relacije R, označimo jo z R^{-1}:

  $$R^{-1} := \{(y, x) \; ; \; (x, y) \in R\}$$

  Velja $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$.
- **produkt relacij** R in S, označimo ga z $R * S$:

  $$R * S := \{(x, z) \; ; \; \exists y \; (xRy \wedge ySz)\}$$

Primer (sorodstvene relacije med ljudmi)

Relacija oče v množici ljudi je definirana kot

$$x \textbf{ oče } y \;\Leftrightarrow\; x \textbf{ je oče } y\textbf{-ona.}$$

Naloga: *Izrazi relacije roditelj, zet, snaha, ded, vnuk, tašča, svak z "bolj elementarnimi" sorodstvenimi relacijami oče, mati, sin, hči, mož, žena, ...*

roditelj $= \textit{oče} \cup \textit{mati}$

mati $= \textit{roditelj} \setminus \textit{oče}$

zet $= \textit{mož} * \textit{hči}$

ded $= \textit{oče} * \textit{oče} \cup \textit{oče} * \textit{mati} = \textit{oče} * (\textit{oče} \cup \textit{mati}) = \textit{oče} * \textit{roditelj}$

vnuk $= \textit{sin} * \textit{sin} \cup \textit{sin} * \textit{hči} = \textit{sin} * (\textit{sin} \cup \textit{hči}) = \textit{sin} * \textit{otrok}$

tašča $= \textit{mati} * \textit{mož} \cup \textit{mati} * \textit{žena} = \textit{mati} * \textit{zakonec}$

svak $= \textit{brat} * \textit{žena} \cup \textit{brat} * \textit{mož} \cup \textit{mož} * \textit{sestra} =$
$\textit{brat} * \textit{zakonec} \cup \textit{mož} * \textit{sestra}$

Lastnosti operacij z relacijami

Naj bodo R, S, T relacije na A.

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$
3. $(R * S) * T = R * (S * T) =: R * S * T$ Produkt relacij je asociativen.
4. $R * (S \cup T) = R * S \cup R * T$
5. $(R \cup S) * T = R * T \cup S * T$
6. $R * \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A * R = R$
7. $R \subseteq S \implies R * T \subseteq S * T$ in $T * R \subseteq T * S$

4. in 5. ne veljata za presek !

Zaradi asociativnosti množenja relacij lahko definiramo **potence** relacij. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

$$\begin{array}{lcl} R^0 & := & \mathrm{id}_A \\ R^{n+1} & := & R^n * R, \text{ če je } n \geq 0. \end{array}$$

Velja $R^1 = R$, $R^2 = R * R$, ter za $m, n \geq 0$ tudi $R^m * R^n = R^{m+n}$.

Definiramo lahko tudi potence z negativnimi eksponenti, če je $n > 0$, potem

$$R^{-n} := (R^{-1})^n$$

Toda če sta m in n celi števili različnih predznakov, potem $R^n * R^m$ ni nujno enako R^{m+n}.