Diskretne strukture

Sedmi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

27. november 2020

Primer (sorodstvene relacije med ljudmi)

Relacija oče v množici ljudi je definirana kot

$$x \text{ } \textbf{oče} \text{ } y \;\Leftrightarrow\; x \text{ } \textbf{je oče} \text{ } y\textbf{-ona.}$$

Naloga: *Izrazi relacije roditelj, zet, snaha, ded, vnuk, tašča, svak z "bolj elementarnimi" sorodstvenimi relacijami oče, mati, sin, hči, mož, žena, . . .*

roditelj $=$ *oče* $\cup$ *mati*

mati $=$ *roditelj* $\setminus$ *oče*

zet $=$ *mož* $*$ *hči*

ded $=$ *oče* $*$ *oče* $\cup$ *oče* $*$ *mati* $=$ *oče* $*$ (*oče* $\cup$ *mati*) $=$ *oče* $*$ *roditelj*

vnuk $=$ *sin* $*$ *sin* $\cup$ *sin* $*$ *hči* $=$ *sin* $*$ (*sin* $\cup$ *hči*) $=$ *sin* $*$ *otrok*

tašča $=$ *mati* $*$ *mož* $\cup$ *mati* $*$ *žena* $=$ *mati* $*$ *zakonec*

svak $=$ *brat* $*$ *žena* $\cup$ *brat* $*$ *mož* $\cup$ *mož* $*$ *sestra* $=$
brat $*$ *zakonec* $\cup$ *mož* $*$ *sestra*

Lastnosti operacij z relacijami

Naj bodo R, S, T relacije na A.

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$
3. $(R * S) * T = R * (S * T) =: R * S * T$ Produkt relacij je asociativen.
4. $R * (S \cup T) = R * S \cup R * T$
5. $(R \cup S) * T = R * T \cup S * T$
6. $R * \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A * R = R$
7. $R \subseteq S \implies R * T \subseteq S * T$ in $T * R \subseteq T * S$

4. in 5. ne veljata za presek !

Zaradi asociativnosti množenja relacij lahko definiramo **potence** relacij. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

$$\begin{array}{lcl} R^0 & := & \mathrm{id}_A \\ R^{n+1} & := & R^n * R, \text{ če je } n \geq 0. \end{array}$$

Velja $R^1 = R$, $R^2 = R * R$, ter za $m, n \geq 0$ tudi $R^m * R^n = R^{m+n}$.

Definiramo lahko tudi potence z negativnimi eksponenti, če je $n > 0$, potem

$$R^{-n} := (R^{-1})^n$$

Toda če sta m in n celi števili različnih predznakov, potem $R^n * R^m$ ni nujno enako R^{m+n}.

Primer (Sorodstvene relacije med ljudmi - ponovno)

Definiraj relacije **prednik**, **potomec**, **sorodnik**.

$$\begin{aligned} \textit{prednik} &= \textit{roditelj} \cup \textit{roditelj} * \textit{roditelj} \\ &\quad \cup \textit{roditelj} * \textit{roditelj} * \textit{roditelj} \cup \ldots = \\ &\quad \textit{roditelj} \cup \textit{roditelj}^2 \cup \textit{roditelj}^3 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\textit{roditelj})^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{potomec} &= \textit{otrok} \cup \textit{otrok} * \textit{otrok} \cup \textit{otrok} * \textit{otrok} * \textit{otrok} \cup \ldots = \\ &\quad \textit{otrok} \cup \textit{otrok}^2 \cup \textit{otrok}^3 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\textit{otrok})^k \end{aligned}$$

$$\textit{sorodnik} = \textit{potomec} * \textit{prednik} = \textit{potomec} * \textit{potomec}^{-1}$$

Potence relacij

Naj bo R relacija v A.

Relacijo R^+ imenujemo **tranzitivna ovojnica** relacije R in jo definiramo s predpisom

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

Relacijo R^* imenujemo **tranzitivno-refleksivna ovojnica** relacije R in jo definiramo s predpisom

$$R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$$

Vprašanje: Kako s pomočjo grafa relacije R opišemo grafa relacij R^+ in R^*?

Ekvivalenčna relacija

$R \subseteq A \times A$ je **ekvivalenčna**, če je

- refleksivna,
- simetrična in
- tranzitivna.

Primer

1. *Relacija* $||$ *vzporednosti v množici vseh premic v ravnini.*
2. $A = \{ljudje\}$, $xRy \iff x$ *ima enako barvo oči kot* y.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}+ \ : xR_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$
   x *in* y *imata isto funkcijsko vrednost.*
4. *Naj bo* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. *Definirajmo relacijo* R *v množici* $\mathbb{Z}$:

$$xRy \iff m \text{ deli } |x - y|$$

   kongruenca po modulu m.

Naj bo $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna in $x \in A$.

$R[x] = \{y \in A\,;\, yRx\}$ je **ekvivalenčni razred** elementa x.

$A/R = \{R[x]\,;\, x \in A\}$ (množica vseh ekvivalenčnih razredov) je **faktorska (kvocientna) množica** množice A po relaciji R.

Trditev

Naj bo R ekvivalenčna relacija na A. Potem za poljubna $x, y \in A$ velja

$$R[x] = R[y] \iff xRy$$

Izrek

Naj bo R ekvivalenčna relacija na A. Potem je A/R razbitje množice A.

Primer

- *"ljudje"/"ista barva oči"* $=$ $\{\{$*ljudje z očmi rjave b.*$\}, \{$*ljudje z očmi zelene b.*$\}, \ldots\} \cong \{$*rjava,zelena*$, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}/$ *"isti ostanek pri deljenju s 5"* $= \{\{\ldots, 0, 5, 10, \ldots\}, \{\ldots, 1, 6, 11, \ldots\}, \ldots\} = \{R[0], R[1], R[2], R[3], R[4]\} \cong \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Primer

Naslednje relacije niso ekvivalenčne:

- *Relacija "imata bankovec z isto vrednostjo v denarnici" v množici ljudi.*
- *Prazna relacija na (neprazni) množici A.*
- *"Je deljiv z istim praštevilom kot" v množici naravnih števil.*
- *"Je približno enak" v množici realnih števil.*