Poglavje 6
Numerično odvajanje

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

30. november 2020

Direktna in obratna formula

Oceniti želimo odvod funkcije $f'(x)$ v točki x.

Uporabili bomo linearno aproksimacijo funckije za $h > 0$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \qquad \text{za } \xi \in [x, x+h],$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \qquad \text{za } \xi \in [x-h, x].$$

Iz vsake od zgornjih formul izrazimo $f'(x)$ in dobimo:

direktna formula : $\boxed{f'(x) = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\text{ocena za } f'(x)} + \underbrace{\left(-\frac{h}{2} f''(\xi)\right)}_{\text{napaka} \in \mathcal{O}(h)},}$

obratna formula : $\boxed{f'(x) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x-h)}{h}}_{\text{ocena za } f'(x)} + \underbrace{\left(\frac{h}{2} f''(\xi)\right)}_{\text{napaka} \in \mathcal{O}(h)}.}$

Izboljšava - sredinsko pravilo

Uporabimo aproksimacijo funkcije s Taylorjevim polinomom stopnje 2 in napako:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_+),\\
f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_-).
\end{aligned}
$$

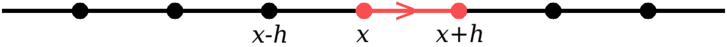
Taylorjeva polinoma odštejemo in izrazimo $f'(x)$:

$$
\boxed{f'(x) = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}_{\text{ocena za } f'(x)} + \mathcal{O}(h^2)}
$$

Vizualizacija vseh treh ocen

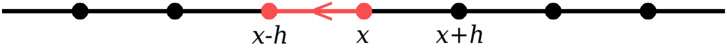
- Direktna formula:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



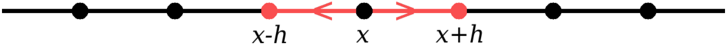
- Obratna formula:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$



- Sredinska formula

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$



Spodnja meja na h pri direktni formuli

Računamo s približki za funckijske vrednosti:

$$\widehat{f}(x) = f(x) + e(x),$$

kjer je $e(x)$ napaka.
Predpostavimo, da je $|e(x)| < \epsilon$ za vsak x in nek $\epsilon > 0$. Velja

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x)}{h} - f'(x)\right| \\
&= \left|\frac{\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| \\
&\leqslant \left|\frac{\widehat{f}(x+h) - f(x+h) + f(x) - \widehat{f}(x)}{h}\right| + \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| \\
&\leqslant \frac{2\epsilon}{h} + \left|\frac{h}{2} f''(\xi)\right| = \frac{2\epsilon}{h} + \frac{h}{2}|f''(\xi)|.
\end{aligned}$$

Iščemo h, ki minimizira zgornjo mejo napake. Stacionarna točka $h > 0$ funkcije $g(h) := \frac{A}{h} + Bh$, kjer sta $A, B > 0$, je

$$g'(h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{A}{h^2} + B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{\frac{B}{A}}.$$

Torej je v našem primeru optimalen $h = 2\sqrt{\dfrac{\epsilon}{|f''(\xi)|}}$.