Diskretne strukture

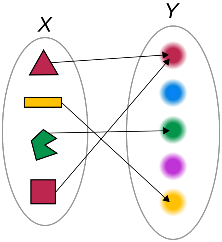
Deveti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

4. december 2020

Relacija $f \subseteq X \times Y$ je **preslikava** iz X v Y, če velja:

- f je enolična
- $\mathcal{D}_f = X$ (definicijsko območje f je cela množica X)
- $\mathcal{Z}_f \subseteq Y$



Pišemo tudi $f : X \to Y$. Namesto $x\, f\, y$ pišemo $y = f(x)$

ali pa tudi $f : x \mapsto y$,

in pravimo, da f **(pre)slika** x v y,

x je **argument**, y pa **vrednost** preslikave f pri x.

Tudi: y je **slika** x-a.

Primer

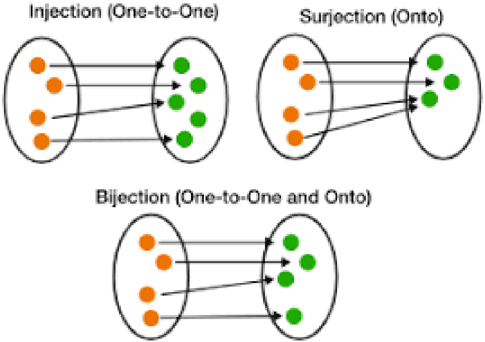
Naj bo X *množica nepraznih bitnih besed* $\{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$ *in* Y *množica naravnih števil* $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Definirajmo relacije $f_1, f_2, f_3 \subseteq X \times Y$, $f_4 \subseteq X \times X$ *in* $f_5 \subseteq Y \times X$ *z naslednjimi opisi:*

- $x \, f_1 \, y$ *natanko tedaj, ko je* y *število enic v* x*-u.*
- $x \, f_2 \, y$ *natanko tedaj, ko je* y *prvi bit niza* x.
- $x \, f_3 \, y$ *natanko tedaj, ko je* y *mesto najbolj leve ničle v* x*-u.*
- $x_1 \, f_4 \, x_2$ *natanko tedaj, ko* x_2 *dobimo tako, da nizu* x_1 *dodamo na koncu* 0 *ali* 1.
- $y \, f_5 \, x$ *natanko tedaj, ko je* x *niz* y *zaporednih enic.*

Katere izmed relacij f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 *so preslikave?*

Naj bo $f : X \to Y$. Pravimo, da je

- f **injektivna**, če $\forall x, y \in X : (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
- f **surjektivna**, če $\mathcal{Z}_f = Y$ (pravimo tudi, da je f preslikava iz X **na** Y)
- f **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna.



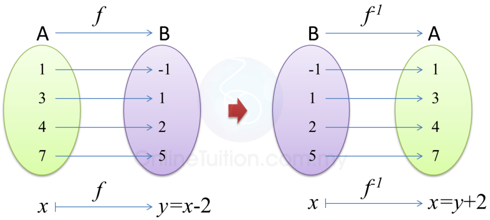
Inverzna preslikava

f^{-1} poznamo samo kot relacijo. *Vprašanje:* Kdaj je f^{-1} tudi preslikava?

Trditev

Naj bo $f : A \to B$ preslikava.

1. *f^{-1} je enolična natanko tedaj, ko je f injektivna,*
2. *$f^{-1} : \mathcal{Z}_f \to A$ je preslikava natanko tedaj, ko je f injektivna,*
3. *$f^{-1} : B \to A$ je preslikava natanko tedaj, ko je f bijektivna.*



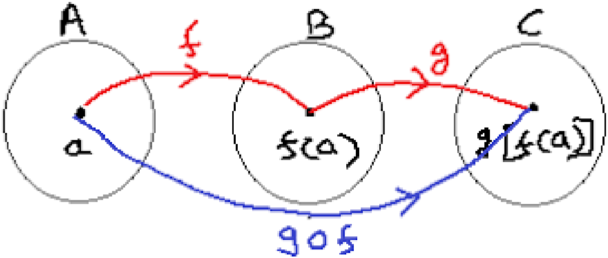
(a) (b)

Kompozitum preslikav

Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$. Potem je $g \circ f$ preslikava iz A v C določena s predpisom

$$g \circ f = f * g.$$

Velja $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ za vse $a \in A$.

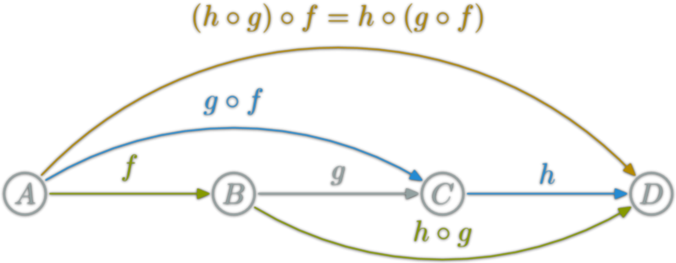


Lastnosti kompozituma

Trditev

Kompozitum preslikav je asociativna operacija, velja namreč:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$



Trditev

Naj bo $f : A \to B$. Potem je

$$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$$

Trditev

Naj bosta $f : A \to B$ *in* $g : B \to C$ *preslikavi. Velja:*

1. f, g *injektivni* $\Longrightarrow g \circ f$ *injektivna*
2. f, g *surjektivni* $\Longrightarrow g \circ f$ *surjektivna*
3. $g \circ f$ *injektivna* $\Longrightarrow f$ *injektivna*
4. $g \circ f$ *surjektivna* $\Longrightarrow g$ *surjektivna*

Trditev

Naj bosta $f : A \to B$, $g : B \to A$, *preslikavi. Če je*

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{in} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B,$$

potem sta

$$f \text{ in } g \text{ bijekciji in je } g = f^{-1}.$$