Diskretne strukture

Deveti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

11. december 2020

- Naj bo A končna množica. Potem $|A|$ označuje **število elementov** ali **moč** množice A.

  Primeri. $|\emptyset| = 0, \quad |\{0,1\}| = 2, \quad |\{\{0,1\}\}| = 1.$

- Če za končni množici A in B velja $|A| = |B|$, pravimo, da sta A in B **enako močni**. Pišemo: $A \sim B$.

Izrek (Dirichletov izrek)

Naj bo A končna množica in $f : A \to A$. Potem velja:

$$f \text{ je injektivna.} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ je surjektivna.} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ je bijektivna.}$$

TODA: Če je A **neskončna** množica, intuicija iz zgornjega izreka odpove:

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$, je injektivna in ni surjektivna.
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

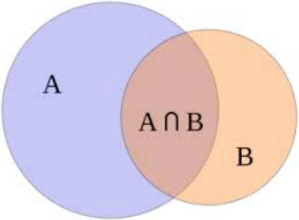
  $$f(0) = f(1) = 0, f(2) = f(3) = 1, f(4) = f(5) = 2, \ldots$$

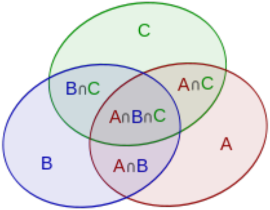
  oz. na kratko $f(2k) = f(2k+1) = k$, $k \in \mathbb{N}$, je surjektivna in ni injektivna.

Trditev

Naj bodo A, B, C končne množice.

1. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
2. $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|}$
3. $|\{f\ ;\ f : A \to B\}| = |B|^{|A|}$
4. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
5. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$





Naj bo A neka množica in A_1, A_2, A_3, A_4 njene podmnožice. Potem velja:

$$
\begin{aligned}
& |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \\
= \quad & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
- \quad & |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\
+ \quad & |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
- \quad & |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.
\end{aligned}
$$

Izrek (Načelo vključitev in izključitev)

Naj bo A končna množica in $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$. Vpeljemo oznako

$$A_{i_1, i_2, \ldots, i_k} := A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}.$$

Potem je

$$
\begin{aligned}
& |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \underbrace{|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|}_{\text{vsota moči vseh množic } A_i} \\
- \quad & \underbrace{(|A_{1,2}| + |A_{1,3}| + \ldots + |A_{n-1,n}|)}_{\text{vsota moči vseh množic } A_{i,j}} + \underbrace{(|A_{1,2,3}| + |A_{1,2,4}| + \ldots + |A_{n-2,n-1,n}|)}_{\text{vsota moči vseh množic } A_{i,j,k}} \\
- \quad & \underbrace{(|A_{1,2,3,4}| + |A_{1,2,3,5}| + \ldots + |A_{n-3,n-2,n-1,n}|)}_{\text{vsota moči vseh množic } A_{i,j,k,\ell}} + \ldots + (-1)^{n+1} |A_{1,2,3,\ldots,n}|.
\end{aligned}
$$

Primer

Koliko je števil na celoštevilskem intervalu $[1 \ldots 96]$, ki so deljiva s 6 in niso deljiva niti s 24 niti z 32.

Rešitvi. Definirajmo univerzalno množico $S = \{1, 2, \ldots, 96\}$.

$A := \{x \in S\colon x \text{ je deljiv s } 6\}$, $B := \{x \in S\colon x \text{ ni deljiv s } 24\}$, $C := \{x \in S\colon x \text{ ni deljiv z } 32\}$.

Zanima nas $|A \cap B \cap C|$. Velja

$$A \cap B \cap C = S \setminus (A \cap B \cap C)^c = S \setminus (A^c \cup B^c \cup C^c).$$

Velja

$$|A^c \cup B^c \cup C^c| = |A^c| + |B^c| + |C^c| - |A^c \cap B^c| - |A^c \cap C^c| - |B^c \cap C^c| + |A^c \cap B^c \cap C^c|.$$

Premislimo

$$A^c = \{x \in S\colon x \text{ ni deljiv s } 6\} \quad \Rightarrow \quad |A^c| = 96 - \frac{96}{6} = 96 - 16 = 80,$$

$$B^c = \{x \in S\colon x \text{ je deljiv s } 24\} \quad \Rightarrow \quad |B^c| = \frac{96}{24} = 4,$$

$$C^c = \{x \in S\colon x \text{ je deljiv z } 32\} \quad \Rightarrow \quad |C^c| = \frac{96}{32} = 3,$$

$$A^c \cap B^c = \{x \in S\colon x \text{ ni deljiv s } 6 \text{ in je deljiv s } 24\} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad |A^c \cap B^c| = 0,$$

$$A^c \cap C^c = \{x \in S\colon x \text{ ni deljiv s } 6 \text{ in je deljiv z } 32\} = \{32, 64\} \quad \Rightarrow \quad |A^c \cap C^c| = 2,$$

$$B^c \cap C^c = \{x \in S\colon x \text{ je deljiv s } 24 \text{ in je deljiv z } 32\} = \{96\}, \quad \Rightarrow \quad |B^c \cap C^c| = 1,$$

$$A^c \cap B^c \cap C^c \subseteq A^c \cap B^c = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset \quad \Rightarrow \quad |A^c \cap B^c \cap C^c| = 0.$$

Sledi

$$|A^c \cup B^c \cup C^c| = 80 + 4 + 3 - 2 - 1 = 84 \quad \Rightarrow \quad |A \cap B \cap C| = 96 - 84 = 12.$$

Primer

Zaposleni v nekem podjetju programirajo v treh jezikih: Java, C in C++. V vsakem jeziku programira tri petine programerjev, v C in C++ dve petini, v C-ju in Javi tri desetine ter v jezikih Java in C++ ena petina. V vseh treh jezikih programira 10 programerjev.
Koliko programerjev je zaposlenih v podjetju?
Koliko jih programira v natanko dveh jezikih?

Rešitvi. Definirajmo univerzalno množico S vseh zaposlenih programerjev v podjetju.

$$A := \{x \in S \colon x \text{ programira v Javi.}\}, \quad B := \{x \in S \colon x \text{ programira v C.}\},$$
$$C := \{x \in S \colon x \text{ programira v C++.}\}.$$

Zanima nas

- $|A \cup B \cup C|$.
- $|A \cap B \cap C^c| + |A \cap B^c \cap C| + |A^c \cap B \cap C|$.

Naj bo $N := |S|$. Vemo še:

- $|A| = |B| = |C| = \frac{3}{5}N$.
- $|B \cap C| = \frac{2}{5}N$, $|A \cap B| = \frac{3}{10}N$, $|A \cap C| = \frac{1}{5}N$.
- $|A \cap B \cap C| = 10$.

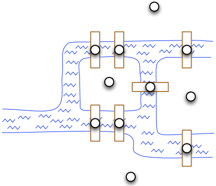
Velja

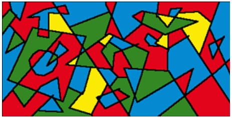
$$N = |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$= \frac{9}{5}N - \frac{3}{10}N - \frac{2}{5}N - \frac{1}{5}N + 10.$$

Sledi $\frac{1}{10}N = 10$ oz. $N = 100$.
Velja še

$$|A \cap B \cap C^c| + |A \cap B^c \cap C| + |A^c \cap B \cap C| = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 3|A \cap B \cap C|$$
$$= (2/5 + 3/10 + 1/5)N - 30 = 60.$$

1. Euler, 1736: *Ali obstaja obhod po mestu Königsberg, ki bi prehodil vse mostove in sicer vsakega natanko enkrat?*
2. Hamilton, 1857: *Ali obstaja sprehod po dodekaedru, ki bi začel v nekem oglišču in obiskal vsa oglišča natanko enkrat, razen začetnega, v katerega bi se vrnil?*
3. Guthrie, 1852, problem 4 barv: *Ali 4 barve zadoščajo za barvanje zemljevida tako, da nobeni dve sosednji državi nista iste barve?*



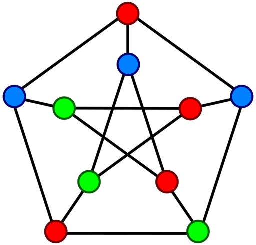


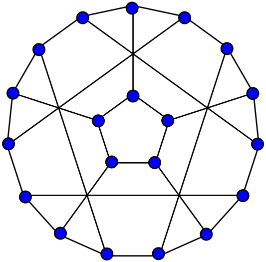
Neusmerjen graf je urejen par $G = (V, E)$, kjer je

- V neprazna končna množica točk (vozlišč) grafa G in
- E množica povezav grafa G, pri čemer je vsaka povezava par točk (povezava je množica dveh različnih točk).

Primer

$V = \{u, v, w, x, y\}$ $\quad$ $E = \{\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}, \{v, x\}\}$





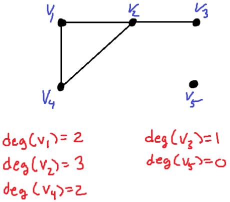
Namesto $e = \{u, v\}$ pišemo krajše $e = uv$ ali $e = vu$. V tem primeru pravimo, da sta točki u in v **krajišči** povezave e, povezava e povezuje točki u in v. Pravimo tudi, da sta u in v **sosednji**, kar označimo z $u \sim v$, ker sta krajišči iste povezave.

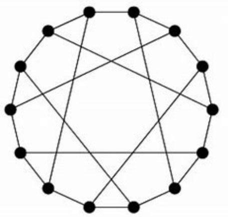
$V = V(G)$ . . . množica točk grafa G, $E = E(G)$ . . . množica povezav grafa G

Stopnja točke $v \in V(G)$ je število povezav, ki imajo v za krajišče. Stopnjo točke v označimo z $\deg(v)$.

Še nekaj definicij:

- Točka stopnje 0 je **izolirana točka**, točki stopnje 1 pravimo tudi **list** grafa.
- Graf G je **regularen**, če imajo vse njegove točke isto stopnjo.
- Graf G je ***d*-regularen**, če so vse točke grafa G stopnje d.
- 3-regularnim grafom pravimo tudi **kubični grafi**.





Izrek (Lema o rokovanju)

Naj bo G graf z n točkami in m povezavami. Potem je

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2 \cdot m$$

Posledica

V vsakem grafu je sodo mnogo točk lihe stopnje.

Končno zaporedje naravnih števil

$$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_n$$

je **grafično**, če obstaja graf G z n točkami, ki imajo stopnje enake $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Primer

1. *Zaporedje* $3, 2, 2, 1, 0$ *je grafično.*
2. *Ali je zaporedje* $5, 4, 3, 2, 2, 1$ *grafično?*
3. *Ali je zaporedje* $6, 4, 4, 3, 2, 2, 1$ *grafično?*

Izrek

Zaporedje $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_n$ je grafično natanko tedaj, ko je tudi zaporedje

$$0, d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n \tag{1}$$

grafično.

Izrek zaporedoma uporabljamo tako, da po vsaki uporabi novo zaporedje uredimo po velikosti do

$$d_1^{(1)} \geq d_2^{(1)} \geq \ldots \geq d_{n-1}^{(1)} \geq 0. \tag{2}$$

Nato znova uporabimo zgornji izrek. Zaporedje (2) je grafično natanko tedaj, ko je zaporedje

$$0, d_2^{(1)} - 1, d_3^{(1)} - 1, \ldots, d_{d_1^{(1)}+1} - 1, d_{d_1^{(1)}+2}, \ldots, d_{n-1}^{(1)}, 0. \tag{3}$$

grafično. Če po največ n-korakih pridemo do samih ničel, je zaporedje grafično. Če pa nekega koraka ne moremo izvesti, ker je premalo neničelnih členov, potem zaporedje ni grafično.

Primer. Ali je $5 \geq 4 \geq 3 \geq 2 \geq 2 \geq 1$ grafično?

- $\Leftrightarrow 0, 3, 2, 1, 1, 0$ je grafično. (Uporabimo izrek.)
- $\Leftrightarrow 3 \geq 2 \geq 1 \geq 1 \geq 0 \geq 0$ je grafično. (Uredimo po velikosti.)
- $\Leftrightarrow 0, 1, 0, 0, 0$ je grafično. (Uporabimo izrek.)
- $\Leftrightarrow 1 \geq 0 \geq 0 \geq 0 \geq 0 \geq 0$ je grafično. (Uredimo po velikosti.)
- Naslednjega koraka ne moremo narediti, kar pomeni, da nobene zaporedje v zgornjih ekvivalencah ni grafično.

Grafa G_1 in G_2 sta **izomorfna**, če obstaja preslikava

$$f : V(G_1) \to V(G_2),$$

za katero velja:

1. f je bijektivna in
2. $u \sim_{G_1} v \;\Leftrightarrow\; f(u) \sim_{G_2} f(v)$.

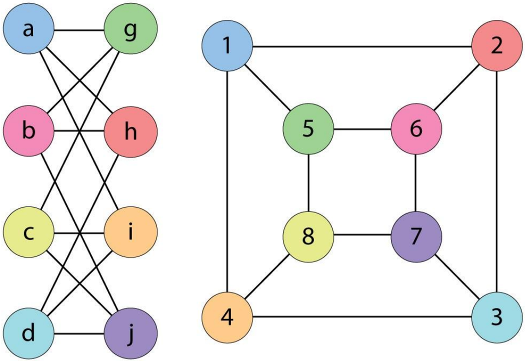
V tem primeru pravimo, da je f izomorfizem grafov G_1 in G_2, ter pišemo $G_1 \cong G_2$.

V nasprotnem primeru (če izomorfizem ne obstaja) pravimo, da sta grafa neizomorfna.

Trditev

Izomorfizem ohranja število vozlišč, število povezav, stopnje vozlišč, število trikotnikov, ...

Izomorfizem grafov



a → 1
b → 6
c → 8
d → 3
g → 5
h → 2
i → 4
j → 7